

Nano

101. — Benoît Kloeckner. *Un bref aperçu de la géométrie projective*
102. — Michel Balazard. *Le théorème des nombres premiers*
103. — Bruno Kahn. *Fonctions zêta et  $L$  de variétés et de motifs*
104. — Patrick Dehornoy. *Le calcul des tresses*
105. — Alain Debreil, Rached Mneimné. *Le groupe symétrique  $S_4$  et ses métamorphoses*
106. — Roger Mansuy, *Introduction aux graphes aléatoires (et à la méthode probabiliste)*
107. — Roger Mansuy. *Introduction aux graphes aléatoires (et à la méthode probabiliste)*
108. — Jean-Denis Eiden, *Espaces euclidiens, avec une ouverture vers les espaces préhilbertiens réels*
109. — François Berteloot. *Les familles normales*
110. — Antoine Chambert-Loir. *Théorie de l'information — Trois théorèmes de Claude Shannon*
111. — Bernard Candelpergher. *Les séries divergentes d'Euler à Ramanujan*
112. — François Rouvière. *Transformations de Radon — Cinq leçons de géométrie intégrale*
113. — Anna Cadoret. *Catégories et représentations (à paraître)*
114. — Alain Debreil, Rached Mneimné.  *$GL(2, \mathbb{Z})$  (en préparation)*

CDD 515.723 ROLL v

François Rouvière

M 1092



070122  
③



## Transformations de Radon

Cinq leçons de géométrie intégrale



Calvage & Mounet

# Table des matières

## Introduction

## Notations

### I. Les droites du plan

1. Définitions et premières propriétés . . . . .	3
1.a. La transformée de Radon . . . . .	3
1.b. Premières propriétés . . . . .	4
1.c. Radon et Fourier . . . . .	6
1.d. La transformation duale . . . . .	9
2. La formule d'inversion de Radon . . . . .	11
3. Inversion par la transformation de Hilbert . . . . .	18
4. Inversion par la méthode de Cormack . . . . .	23
5. Inversion par un opérateur de Riesz . . . . .	28
6. Un théorème de support . . . . .	31
7. Un théorème sur l'image . . . . .	35
Notes . . . . .	39

**II. Les  $d$ -plans de  $\mathbb{R}^n$**

- 1. Définitions et premières propriétés . . . . . 43
  - 1.a. Généralités . . . . . 43
  - 1.b. Cas des hyperplans . . . . . 48
- 2. Inversion par les opérateurs de Riesz . . . . . 49
- 3. Inversion par la transformation duale décalée . . . . . 52
  - 3.a. Cas d'une fonction radiale . . . . . 52
  - 3.b. Cas général . . . . . 54
  - 3.c. Cas des hyperplans . . . . . 57
- 4. Un théorème de support . . . . . 60
- 5. Application à l'équation des ondes . . . . . 63
  - 5.a. Résolution de l'équation des ondes . . . . . 64
  - 5.b. Principe de Huygens . . . . . 68
- 6. Théorèmes sur l'image . . . . . 71
  - 6.a. Cas des hyperplans . . . . . 71
  - 6.b. Cas des droites : conditions de moment . . . . . 73
  - 6.c. Cas des droites : équations aux dérivées partielles . . . . . 80
- Notes . . . . . 87

**III. Géodésiques et horocycles du disque hyperbolique**

- 1. Le disque hyperbolique . . . . . 94
- 2. Géodésiques . . . . . 98
- 3. Horocycles . . . . . 102
  - 3.a. Les horocycles . . . . . 102
  - 3.b. La fonction  $\tau$  . . . . . 106
- 4. Transformation de Radon géodésique . . . . . 110
- 5. Transformation de Radon horocyclique . . . . . 117
- 6. Un théorème de support . . . . . 123
  - 6.a. Transformation géodésique et support . . . . . 124
  - 6.b. Utilisation du disque de Klein . . . . . 126
- 7. Transformation de Fourier-Helgason . . . . . 129
  - 7.a. Mesure riemannienne et opérateur de Laplace . . . . . 130
  - 7.b. Fonctions propres du laplacien . . . . . 133
  - 7.c. La transformation de Fourier-Helgason . . . . . 135
  - 7.d. Application à la transformation géodésique . . . . . 139
- Notes . . . . . 141

**IV. Transformations de Radon et groupes de Lie**

- 1. Espaces homogènes en dualité . . . . . 147
  - 1.a. Retour sur un exemple . . . . . 147
  - 1.b. Relation d'incidence et espaces homogènes en dualité . . . . . 149
- 2. Cas des groupes de Lie . . . . . 154
  - 2.a. Mesures invariantes . . . . . 154
  - 2.b. Transformée de Radon . . . . . 155
- 3. À la recherche de formules d'inversion . . . . . 161
  - 3.a. Convolution sur un espace homogène . . . . . 162
  - 3.b. Application aux transformées de Radon . . . . . 165
  - 3.c. La transformation duale décalée . . . . . 169
- 4. Lien avec les opérateurs différentiels invariants . . . . . 172
  - 4.a. Du groupe aux espaces homogènes . . . . . 172
  - 4.b. L'exemple des  $d$ -plans de  $\mathbb{R}^n$  . . . . . 176
  - 4.c. L'exemple du disque hyperbolique . . . . . 179
- Notes . . . . . 183

**V. Transformations de Radon et analyse microlocale**

- 1. Doubles fibrations et incidence . . . . . 187
- 2. Transformation de Radon et transformation duale . . . . . 190
- 3. Résultat principal . . . . . 193
- 4. Intégration sur une famille d'hypersurfaces . . . . . 196
- 5. Le théorème V-7 pour les hypersurfaces . . . . . 203
  - 5.a. Le cadre géométrique . . . . . 203
  - 5.b. Calcul de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^*$  . . . . . 210
  - 5.c. Intégrales oscillantes . . . . . 212
  - 5.d. L'opérateur  $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$  est pseudo-différentiel . . . . . 214
  - 5.e. L'opérateur  $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$  est elliptique . . . . . 216
  - 5.f. Conclusion . . . . . 217
- 6. Wave front et théorèmes de support . . . . . 217
  - 6.a. Wave fronts . . . . . 217
  - 6.b. Un théorème de support . . . . . 221
- Notes . . . . . 225

**A. Un lemme sur les fonctions radiales**

- . . . . . 229

<b>B. Une formule intégrale</b>	
.....	231
<b>C. L'opérateur kappa</b>	
1. Inversion de la transformation de Radon affine	234
1.a. Transformation de Radon affine	234
1.b. Formules d'inversion	238
2. L'opérateur kappa	241
<b>D. La transformation de Felix</b>	
1. Le cadre	248
2. Une formule d'inversion	250
3. Exemples	253
<b>E. Opérateurs pseudo-différentiels et intégraux de Fourier</b>	
1. Symboles et intégrales oscillantes	261
1.a. Symboles	261
1.b. Intégrales oscillantes	263
1.c. Opérateurs régularisants	267
2. Opérateurs pseudo-différentiels elliptiques	269
2.a. Symbole d'un opérateur pseudo-différentiel	269
2.b. Opérateurs pseudo-différentiels elliptiques	271
3. Opérateurs pseudo-différentiels <sup>*</sup> analytiques	272
<b>Bibliographie</b>	<b>275</b>
<b>Index</b>	<b>283</b>

# Introduction

## Transformations de Radon : les grands problèmes

Voici un peu plus d'un siècle que Johann Radon, alors « privatdozent » à l'Université de Vienne, publiait l'article fondateur « *Sur la détermination des fonctions par leurs intégrales sur certaines variétés* » (1917) [75]. Il y résolvait le problème suivant : déterminer une fonction de deux variables réelles, connaissant les intégrales de sa restriction à chaque ligne droite du plan. Il disait s'être inspiré d'un article antérieur de Paul Funk (1916) qui résolvait un problème analogue sur la sphère, lui-même inspiré d'un travail de Hermann Minkowski (1911). Radon esquissait de plus une extension de son résultat à plusieurs questions similaires, notamment en remplaçant les droites du plan euclidien par les géodésiques du plan hyperbolique.

Curieusement, ce beau travail n'a presque pas attiré l'attention pendant plusieurs décennies, à une notable exception près, l'article [54] de Fritz John paru en 1938. Il a fallu attendre les années 1960 pour qu'il soit enfin repris, sous la double impulsion de nouvelles avancées théoriques (doubles fibrations, liens avec la théorie des groupes et avec les équations aux dérivées partielles) et des applications à l'imagerie médicale (tomographie, scanner)

