

Cap
Prépa



2^e année

Sous la direction de
François Héroult
Éric Le Nagard

Emmanuel Blanchard
Michel Henri
Michèle Henri
Philippe Quiblier

Mathématiques

PC-PC*

**Cours complet avec tests,
exercices et problèmes corrigés**



**DVD-ROM
INCLUS**

- de nombreux exemples de calcul formel réalisés avec *Maple* et *Mathematica* ;
- une version d'évaluation de *Maple 13* et de *Mathematica*® 7 ;
- une promotion spéciale étudiant pour ces deux logiciels.

Classes préparatoires PC-PC*

PEARSON

M1902

Cap Prépa



048578

③



Mathématiques

PC-PC*

**Cours complet avec tests,
exercices et problèmes corrigés**

Sous la direction de
François Hérault
Éric Le Nagard

Emmanuel Blanchard
Michel Henri
Michèle Henri
Philippe Quiblier

Table des matières

Préface	xix
Remerciements	xxi
Partie 1 – Algèbre linéaire	1
1 Compléments d’algèbre linéaire	3
I Rappels du cours de première année	3
I.1 Famille dans un espace vectoriel de dimension quelconque	3
I.2 Application linéaire dans un espace vectoriel de dimension quelconque	4
I.3 Espaces vectoriels en dimension finie	5
I.4 Application linéaire dans un espace vectoriel de dimension quelconque	5
I.5 Généralités sur les matrices	6
I.6 Matrices particulières	7
I.7 Matrice d’une famille de vecteur, matrice d’application linéaire	7
I.8 Changement de base et applications	8
I.9 Application linéaire canoniquement associée et matrices équivalentes	8
I.10 Commandes <i>Maple/Mathematica</i>	9
II Espaces vectoriels	10
II.1 Somme directe de sous-espaces vectoriels en dimension quelconque	10
II.2 Somme directe de sous-espaces vectoriels en dimension finie	16
III Applications linéaires	16
III.1 Image et noyau d’une application linéaire	16
III.2 Équation linéaire	18
III.3 Matrices semblables, trace	21
IV Déterminants	24
IV.1 Déterminant de n vecteurs	24
IV.2 Déterminant d’un endomorphisme	27
IV.3 Déterminant d’une matrice carrée	30
IV.4 Systèmes de Cramer	32
IV.5 Développement par rapport à une ligne ou une colonne, mineur, cofacteur et comatrice	33

IV.6	Annexe : démonstration du théorème fondamental	38
V	Calculs par blocs	42
V.1	Calcul matriciel et déterminant par blocs	42
V.2	Déterminants par blocs	44
VI	L'essentiel du cours	45
VII	Préparation à l'interrogation orale	48
VIII	Exercices	49
IX	Problème	53
	Pseudo-sous-algèbres et sous-algèbres irréductibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	53
2	Réduction des endomorphismes	57
I	Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme	57
I.1	Sous-espaces stables	57
I.2	Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice	62
II	Réduction d'un endomorphisme	65
II.1	Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme	65
II.2	Polynôme caractéristique	69
II.3	Réduction d'un endomorphisme en dimension finie	71
III	Réduction des matrices carrées	79
III.1	Éléments propres	79
III.2	Réduction	81
III.3	Un exemple d'application d'étude de suites récurrentes	83
IV	L'essentiel du cours	86
V	Préparation à l'interrogation orale	89
VI	Exercices	89
VII	Problème	92
	Translations dans des espaces de fonctions	92
3	Espaces préhilbertiens réels ou complexes et espaces euclidiens	95
I	Espaces préhilbertiens réels ou complexes	95
I.1	Produit scalaire	95
I.2	Orthogonalité	102
II	Espaces euclidiens	106
II.1	Bases orthonormales	106
II.2	Projection orthogonale	108
III	L'essentiel du cours	113
IV	Préparation à l'interrogation orale	117
V	Exercices	117
VI	Problème	119
	Polynômes orthogonaux et équations différentielles	119

4	Endomorphismes orthogonaux, endomorphismes symétriques	123
I	Endomorphismes orthogonaux	123
I.1	Définition	123
I.2	Structure de groupe	124
I.3	Utilisation d'une base orthonormée	125
I.4	Point de vue matriciel	126
I.5	Cas des symétries orthogonales	128
I.6	Déterminant, valeurs propres et classification	130
I.7	Rappels sur le cas de la dimension 2 ou 3	132
II	Endomorphismes symétriques	134
II.1	Définition	134
II.2	Cas des projecteurs et des symétries	135
II.3	Point de vue matriciel	137
III	Réduction des endomorphismes symétriques et applications	138
III.1	Valeurs propres d'une matrice symétrique réelle	138
III.2	Réduction des endomorphismes symétriques	139
III.3	Applications de la réduction des endomorphismes symétriques	142
IV	L'essentiel du cours	149
V	Préparation à l'interrogation orale	150
VI	Exercices	150
VII	Problème	152
	Racine carrée d'une matrice symétrique positive	152

Partie 2 – Suites et fonctions **155**

5	Espaces vectoriels normés	157
I	Notion générale de norme et espaces vectoriels normés	157
I.1	Définitions	157
I.2	Distance associée à une norme	158
I.3	Cas particulier des espaces préhilbertiens	158
I.4	Exemples d'espaces vectoriels normés	159
I.5	Boules	161
I.6	Parties bornées	162
I.7	Applications lipschitziennes	163
II	Suites vectorielles	164
II.1	Suites bornées	165
II.2	Suites convergentes	165
II.3	Comparaison de deux normes	167
III	Espaces vectoriels normés de dimension finie	169
III.1	Équivalence des normes	169

III.2	Étude des suites de vecteurs d'un espace de dimension finie	169
III.3	Topologie dans un espace vectoriel normé de dimension finie	171
III.4	Étude locale d'une application	174
III.5	Fonctions en escalier	184
III.6	Continuité par morceaux	185
IV	Approximation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes .	186
IV.1	Polynôme de Lagrange d'une fonction f	186
IV.2	Approximation uniforme	187
IV.3	Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier	189
IV.4	Théorème de Weierstrass	189
V	L'essentiel du cours	191
VI	Préparation à l'interrogation orale	193
VII	Exercices	193
VIII	Problèmes	195
	Normes matricielles subordonnées	195
	Étude d'un opérateur de transfert	196
6	Suites et séries de nombres réels ou complexes	199
I	Séries numériques : généralités	199
II	Séries de nombres réels positifs	208
III	Convergence absolue d'une série numérique	213
IV	Critère spécial des séries alternées	218
V	Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes	221
VI	Étude de suites définies par une relation de récurrence	224
VI.1	Cas des suites à valeurs réelles	224
VI.2	Cas des suites à valeurs complexes	226
VII	L'essentiel du cours	231
VIII	Préparation à l'interrogation orale	235
IX	Exercices	235
X	Problèmes	237
	Autour de la moyenne de Cesàro	237
	Étude d'une suite définie récursivement	238
7	Séries de fonctions	239
I	Convergence simple	240
I.1	Convergence simple d'une suite de fonctions	240
I.2	Convergence simple d'une série de fonctions	242
II	Convergence normale	244
II.1	Convergence normale sur l'intervalle I	244
II.2	Convergence normale sur tout segment de I	247

III	Propriétés conservées par convergence normale	249
III.1	Continuité	249
III.2	Limite terme à terme	250
III.3	Intégration terme à terme	254
III.4	Dérivation terme à terme	256
IV	L'essentiel du cours	259
V	Préparation à l'interrogation orale	260
VI	Exercices	260
VII	Problème	262
	Étude de l'opérateur T	262

Partie 3 – Fonction d'une variable réelle : dérivation et intégration 265

8 Dérivation et intégration des fonctions à valeurs vectorielles 267

I	Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles	267
I.1	Dérivabilité et dérivée	267
I.2	Dérivées successives et fonctions de classe \mathcal{C}^p	273
I.3	\mathcal{C}^p -difféomorphismes entre intervalles de \mathbb{R}	277
I.4	Fonctions de classe \mathcal{C}^p par morceaux	278
I.5	Rappels pour les fonctions à valeurs réelles	281
II	Intégrale sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles	282
II.1	Définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles	282
II.2	Propriétés de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles	283
II.3	Sommes de Riemann	285
II.4	Extension de la définition	288
II.5	Intégrale et inégalité dans le cas d'une fonction à valeurs réelles	289
III	L'essentiel du cours	291
IV	Préparation à l'interrogation orale	294
V	Exercices	294
VI	Problème	296
	Polynômes de Legendre et approximation d'une intégrale	296

9 Dérivation et intégration 301

I	Primitive	301
I.1	Cas des fonctions continues	301
I.2	Généralisation aux fonctions continues par morceaux	304
II	Théorèmes opératoires	305
II.1	Théorèmes de changement de variable	305
II.2	Intégration par parties	307
III	Accroissements finis et formules de Taylor	308
III.1	Étude globale des fonctions de classe \mathcal{C}^1	308

III.2	Formules de Taylor	312
IV	L'essentiel du cours	315
V	Préparation à l'interrogation orale	317
VI	Exercices	317
VII	Problème	318
	Étude d'un endomorphisme sur l'espace des fonctions continues	318
10	Intégrales impropres	321
I	Intégrale impropre convergente	321
I.1	Définition d'une intégrale impropre convergente	321
I.2	Intégrales des fonctions positives	328
I.3	Intégrales absolument convergentes	333
II	Intégration sur un intervalle quelconque	335
II.1	Premières définitions et propriétés	335
II.2	Convergence en moyenne quadratique	337
II.3	Convergence dominée	339
II.4	Intégration terme à terme d'une série de fonctions	342
III	Intégrales dépendant d'un paramètre	343
III.1	Continuité sous le signe somme	343
III.2	Dérivation sous le signe \int : formule de Leibniz	345
IV	Comparaison d'une série à une intégrale	349
V	L'essentiel du cours	354
VI	Préparation à l'interrogation orale	358
VII	Exercices	358
VIII	Problème	361
	Transformation de Laplace et convolution	361
	Étude d'une série trigonométrique	363
	Partie 4 – Séries entières, séries de Fourier	367
11	Séries entières	369
I	Série entière et rayon de convergence	369
I.1	Définition d'une série entière et exemples	369
I.2	Rayon de convergence	370
I.3	Calcul d'un rayon de convergence	372
I.4	Opérations algébriques sur les séries entières	376
I.5	Série entière dérivée	378
II	Propriétés de la somme d'une série entière	379
II.1	Convergence d'une série entière en tant que série de fonctions	379

II.2	Continuité de la somme d'une série entière	380
II.3	Intégration de la somme d'une série entière	382
II.4	Dérivabilité de la somme d'une série entière	383
III	Fonctions développables en série entière	385
III.1	Définition d'une fonction développable en série entière	385
III.2	Série entière de Taylor	386
III.3	Développement en série entière des fonctions usuelles	388
III.4	Exemples de calcul de somme d'une série entière	392
IV	L'essentiel du cours	395
V	Préparation à l'interrogation orale	398
VI	Exercices	398
VII	Problème	400
	Étude de la somme d'une série entière sur le disque de convergence	400

12 Séries de Fourier **403**

I	Fonctions périodiques; polynôme trigonométrique de meilleure approximation . .	404
I.1	Rappels de calcul intégral	404
I.2	Construction de fonctions périodiques	405
I.3	Structure préhilbertienne	407
I.4	Polynôme trigonométrique	408
I.5	Meilleure approximation quadratique; coefficients de Fourier	409
I.6	Quelques propriétés	412
I.7	Coefficients de Fourier trigonométriques	412
II	Série de Fourier. Théorèmes de convergence	415
II.1	Série de Fourier	415
II.2	Convergence en moyenne quadratique; formule de Parseval	415
II.3	Comportement asymptotique des coefficients de Fourier	421
II.4	Convergence normale	422
II.5	Le théorème de Dirichlet	424
III	Analyse du signal	429
IV	L'essentiel du cours	431
V	Préparation à l'interrogation orale	433
VI	Exercices	434
VII	Problème	436
	Répartition modulo 1 de suites de nombres réels	436

13 Équations différentielles	441
I Équations différentielles linéaires d'ordre 1	441
I.1 Définitions	442
I.2 Résolution de l'équation (H) $y' + ay = 0$	444
I.3 Résolution de l'équation (E) $y' + ay = b$	445
I.4 Théorème de Cauchy	449
I.5 Problèmes de raccordement	450
I.6 Résolution approchée de (E) $y' + ay = b$	454
II Systèmes différentiels à coefficients constants	457
II.1 Définitions	457
II.2 Théorème de Cauchy	458
II.3 Résolution pratique dans le cas où la matrice A est diagonalisable	460
II.4 Résolution pratique dans le cas où la matrice A est trigonalisable	465
III Équations différentielles linéaires du second ordre	468
III.1 Définitions	468
III.2 Théorème de Cauchy	470
III.3 Résolution de l'équation (H) $y'' + ay' + by = 0$	470
III.4 Résolution de l'équation (E) $y'' + ay' + by = c$	473
III.5 Problèmes de raccordement	481
III.6 Utilisation d'un changement de variable	483
IV Équations différentielles non linéaires	484
IV.1 Systèmes différentiels autonomes	484
IV.2 Équations différentielles non linéaires du premier ordre	486
V L'essentiel du cours	493
VI Préparation à l'interrogation orale	497
VII Exercices	497
VIII Problème	500
Étude d'une équation différentielle	500
14 Fonctions de plusieurs variables	503
I Continuité et applications partielles	504
I.1 Applications partielles	504
I.2 Continuité et applications partielles	505
II Dérivées selon un vecteur, dérivées partielles	506
II.1 Dérivée selon un vecteur	506
II.2 Dérivées partielles	507
II.3 Applications de classe \mathcal{C}^1	510

III	Différentielle	510
III.1	Théorème fondamental ; définition de la différentielle	510
III.2	Notation différentielle	514
III.3	Expression par les composantes	514
III.4	Composition	515
III.5	Invariance de la différentielle	517
III.6	Opérations sur les différentielles	518
III.7	Matrice jacobienne, jacobien	518
III.8	Dérivées partielles d'une composée	519
IV	C^1 -difféomorphismes, changements de variables. Applications	521
IV.1	C^1 -difféomorphismes	521
IV.2	Détermination continue de l'argument ; application aux coordonnées polaires	523
IV.3	Exemples d'équations aux dérivées partielles	525
V	Dérivées d'ordre supérieur	528
V.1	Fonctions de classe C^2 ; théorème de Schwarz	528
V.2	Fonctions de classe C^k	530
V.3	Exemple d'équation aux dérivées partielles secondes	531
VI	Fonctions à valeurs réelles	533
VI.1	Gradient	533
VI.2	Problèmes d'extremum	535
VII	Calcul intégral à plusieurs variables	537
VII.1	Intégrales doubles	537
VII.2	Intégrales triples	543
VIII	L'essentiel du cours	546
IX	Préparation à l'interrogation orale	549
X	Exercices	549
XI	Problème	551
	Polynômes de Legendre et harmoniques sphériques	551
15	Courbes et surfaces	555
I	Courbes paramétrées	555
I.1	Courbes paramétrées, paramétrage	555
I.2	Changement de paramétrage	556
I.3	Étude locale	558
I.4	Cas des courbes planes, étude locale plus précise	559
I.5	Branches infinies	562
I.6	Points doubles	563
I.7	Mise en œuvre	563
I.8	Coordonnées polaires	565
II	Étude métrique d'un arc orienté	570

II.1	Abcisse curviligne	570
II.2	Longueur d'une courbe	571
II.3	Étude métrique des courbes planes	573
III	Généralités sur les surfaces	580
III.1	Nappe paramétrée	580
III.2	Exemples	581
III.3	Courbes tracées sur une surface	582
III.4	Points réguliers, plan tangent, normale	583
III.5	Équations cartésiennes	585
III.6	Plan tangent et normale d'une courbe ou surface définie par une équation cartésienne	587
IV	Quelques types remarquables de surface	588
IV.1	Cylindres	588
IV.2	Cônes	591
IV.3	Surfaces de révolution	593
IV.4	Contours apparents	598
V	Quadriques	600
V.1	Définition et réduction	600
V.2	Quadriques à centre	602
V.3	Cylindres et paraboloides	603
V.4	Autres cas	603
V.5	Familles de droites tracées sur certaines quadriques	603
V.6	Exemples	604
VI	Intersection de deux surfaces	606
VII	L'essentiel du cours	609
VIII	Préparation à l'interrogation orale	612
IX	Exercices	612
X	Problème	614
	Autour de la fenêtre de Viviani	614

Partie 6 – Révisions 617

16 Exercices et problèmes de synthèse 619

I	Tests	619
II	Exercices	622
III	Problèmes	624
	Distance d'une matrice ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$	624
	Produits infinis	627
	Chiffrement par blocs	628
	Cryptage et décryptage : Ave Cesar (zud bdrzq)	630

La collection *Cap Prépa* aide l'étudiant à répondre à la question-clé « Que dois-je savoir ? ».

Avec *Cap Prépa*, retrouvez l'esprit Pearson : transmettre de la façon la plus claire et illustrée des contenus de haute qualité et des méthodologies efficaces. *Cap Prépa* mobilise ainsi des équipes d'enseignants chevronnés afin de réaliser ces ouvrages où l'exactitude du propos se combine avec le souci de l'efficacité.

Garder le cap
pour savoir
ce qu'il faut
savoir, sans se
dispenser...



Le public

Étudiants en classe préparatoire scientifique, filières PC-PC* ; étudiants en premier cycle universitaire ; candidats au Capes et à l'agrégation ; tout lecteur désireux de comprendre les fondements des mathématiques.

Ce manuel couvre l'ensemble du programme de mathématiques de la deuxième année PC-PC* : **algèbre linéaire ; suites et fonctions ; fonctions d'une variable réelle : intégration et dérivation ; séries entières, séries de Fourier ; équations différentielles, calcul différentiel et géométrie différentielle.** Il s'attache dès le départ à faire ressortir les raisons d'être et le sens de toutes les notions introduites, qui s'enrichissent ensuite progressivement.

La présentation approfondie des objets étudiés est complétée par un effort pédagogique permanent.

- **De nombreux exemples** vous permettent d'assimiler les techniques mises en œuvre.
- **Des encadrés « Rappel », « Attention », « Méthode » et « Synthèse »** reprennent les notions fondamentales, soulignent les pièges à éviter, récapitulent la marche à suivre pour résoudre les problèmes et synthétisent les notions complexes.
- **Des questions tests** sont posées au fil du texte ; elles permettent de valider les acquis progressivement.
- **De très nombreux exercices (intégralement corrigés dans l'ouvrage) et des problèmes**, souvent extraits de sujets de concours, sont proposés pour vous permettre d'appliquer les méthodes présentées.
- **L'essentiel du cours** est résumé sous la forme d'un formulaire à la fin de chaque chapitre : vous apprécierez de pouvoir vous y référer juste avant un devoir sur table pour réactiver vos connaissances.
- **Les principales commandes des logiciels Maple et Mathematica**, dont la maîtrise est nécessaire en classe préparatoire, sont détaillées de façon logique au fil de l'ouvrage. Le DVD-ROM joint au livre donne de nombreux exemples de leur utilisation et permet de comprendre l'intérêt du calcul formel pour la résolution de certains problèmes.

Véritable ouvrage de référence pour la préparation aux concours, il se fixe aussi pour objectif de **présenter les bases des mathématiques de façon claire, rigoureuse et détaillée.**

Un manuel unique, qui correspond à vos besoins et qui deviendra vite votre guide pour garder le cap vers la réussite dans les épreuves de mathématiques !



Un DVD-ROM comprenant :

- de nombreux exemples de calcul formel réalisés avec Maple et Mathematica ;
- une version gratuite de 60 jours de Maple® 13 et de Mathematica 7 ;
- une promotion spéciale étudiant pour ces deux logiciels.

Les auteurs

Ouvrage dirigé par François Héroult et Éric Le Nagard, professeurs en classes préparatoires aux Grandes Écoles au lycée Hoche à Versailles.

Les auteurs sont professeurs en classe préparatoire et le plus souvent membres de jurys des concours d'entrée aux Grandes Écoles : Emmanuel Blanchard (lycée Turgot, Paris), Michel Henri (lycée Camille Guérin, Poitiers), Michèle Henri (lycée Camille Guérin, Poitiers), Philippe Quiblier (lycée Berthollet, Annecy).

PEARSON

Pearson Education France
47 bis, rue des Vinaigriers
75010 Paris
Tél. : 01 72 74 90 00
Fax : 01 42 05 22 17
www.pearson.fr

ISBN : 978-2-7440-7438-7

