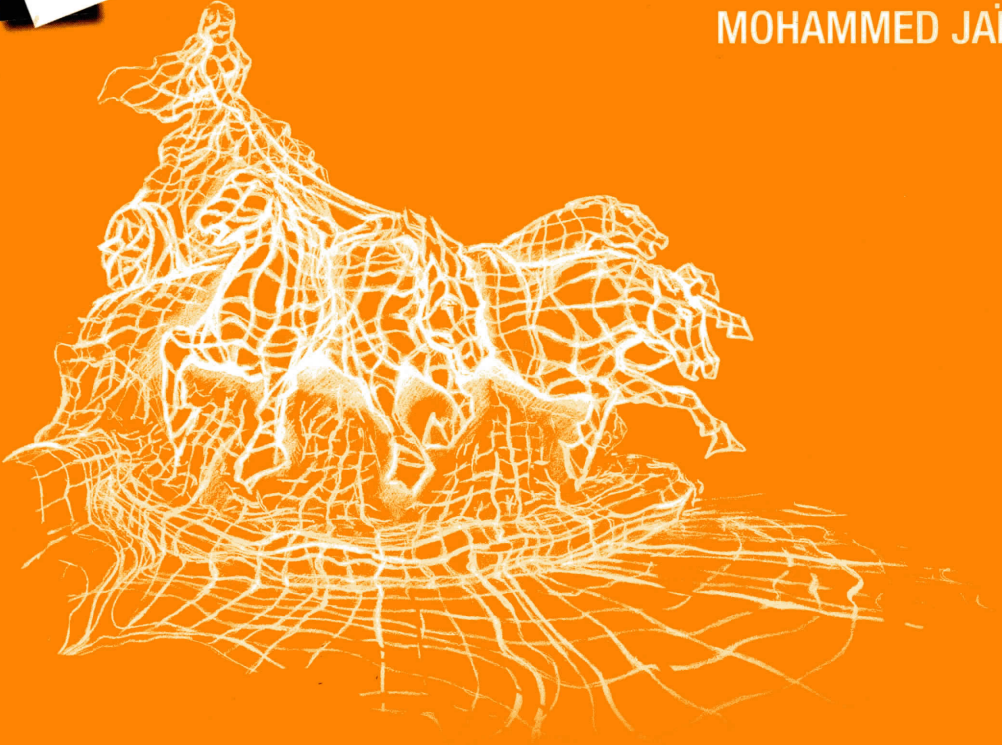


METIS LyonTech

JEAN-MARC GILSINGER
MOHAMMED JAÏ



ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Fondements et applications
aux sciences de l'ingénieur

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

M 875

METIS LyonTech

047974

(3)

Eléments d'analyse fonctionnelle

Fondements et applications
aux sciences de l'ingénieur

Jean-Marc Gilsinger et Mohammed Jaï



Table des matières

Préface	v
Avant-propos	vii
1 Transformation de Laplace	1
1.1 Introduction	1
1.2 Définitions	3
1.2.1 Transformation de Laplace (unilatérale)	3
1.2.2 Abscisse de convergence absolue	4
1.2.3 Fonction f d'ordre exponentiel	5
1.2.4 Existence et unicité de l'original	6
1.3 Propriétés de la transformation de Laplace	8
1.3.1 Linéarité, retard, changement d'échelle	8
1.3.2 Dérivation et intégration	10
1.3.3 Limites	15
1.4 Convolution, filtre et fonction de transfert	18
1.4.1 Produit de convolution. Définition et existence	18
1.4.2 Transformation du produit de convolution	20
1.4.3 Filtre et causalité	20
1.4.4 Systèmes asservis	22
1.5 Exercices	27

2.4	Dérivation au sens des distributions	51
2.4.1	Dérivation	51
2.4.2	Primitive d'une distribution nulle	53
2.5	Convergence d'une suite de distributions	54
2.5.1	Convergence de (f_n) et convergence de $([f_n])$	54
2.5.2	Suite « unité approchée » de δ	54
2.5.3	Dérivée d'une distribution	55
2.5.4	Série de Fourier d'une distribution	56
2.6	Convolution	59
2.6.1	Produit de convolution de fonctions	59
2.6.2	Définition fonctionnelle du produit de convolution et supports	61
2.6.3	Produit de convolution $S * T$ de deux distributions lorsque l'une des distributions au moins est à support compact	64
2.6.4	Équation convolutive	66
2.7	Transformation de Laplace des distributions	75
2.7.1	Les distributions tempérées	76
2.7.2	Transformée de Laplace de $T \in \mathcal{S}'_+$	76
2.7.3	Distributions de \mathcal{D}'_+ transformables par Laplace	77
2.7.4	Propriétés de la transformation de Laplace	79
2.8	Exercices	84
3	Espaces de Hilbert	93
3.1	Introduction	93
3.2	Définitions	94
3.2.1	Produit scalaire hermitien	94
3.2.2	Norme hilbertienne	95
3.2.3	Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert	97
3.3	Projection orthogonale	98
3.3.1	Orthogonalité dans un espace préhilbertien H	98
3.3.2	Meilleure approximation en moyenne quadratique	100
3.3.3	Théorème de représentation de Riesz	104
3.4	Bases hilbertiennes	107
3.4.1	Orthonormalisation	107
3.4.2	Inégalité de Bessel	110
3.4.3	Espace séparable et base hilbertienne	111
3.4.4	Égalité de Bessel-Parseval	113
3.4.5	Polynômes orthogonaux	114
3.5	Exercices	117
4	Problème de Sturm-Liouville	131
4.1	Introduction : e.d.p. avec conditions aux limites	131
4.1.1	Corde vibrante et séries de Fourier	131
4.1.2	Membrane vibrante et fonction J_0	135
4.2	Problème de Sturm-Liouville	138
4.2.1	Opérateur L_d	139

4.2.2	Fonction de Green	141
4.2.3	Opérateur autoadjoint (ou hermitien)	148
4.3	Opérateur compact	151
4.3.1	Opérateur compact ; définition et propriétés	152
4.3.2	Spectre d'un opérateur compact	156
4.3.3	Inversibilité de $I - T$ et alternative de Fredholm	158
4.4	Opérateur autoadjoint compact	162
4.4.1	Existence de valeurs propres	162
4.4.2	Diagonalisation d'un opérateur compact autoadjoint	163
4.5	Équicontinuité et compacité	166
4.5.1	Définitions et exemples	167
4.5.2	Théorème d'Ascoli-Arzelà	169
4.5.3	Compacité de T_G	172
4.6	Résolution du problème de Sturm-Liouville	175
4.7	Exercices	183
5	Introduction aux éléments finis	207
5.1	Un exemple de calcul des variations	207
5.2	Formulation variationnelle	210
5.2.1	Exemple de formulation variationnelle	210
5.2.2	Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	211
5.2.3	Existence et unicité de la solution faible du problème (EDv)	214
5.3	Théorème de Lax-Milgram	215
5.4	Quel espace de Sobolev choisir ?	219
5.4.1	Problème de Sturm-Liouville avec (CL) de Neumann	221
5.4.2	Conditions mixtes	223
5.5	Approximation. La méthode de Galerkin	224
5.5.1	La méthode de Galerkin	224
5.5.2	Convergence de la méthode de Galerkin	225
5.5.3	Construction d'un sous-espace V_n de $H_0^1(\Omega)$. Fonction-chapeau Λ	227
5.6	La méthode des éléments finis	231
5.7	Mise en œuvre de la méthode	236
5.7.1	Matrice de rigidité locale relative à l'élément fini k	236
5.7.2	Assemblage de la matrice de rigidité globale	238
5.8	Estimation d'erreur	241
5.9	Exercices	244
	Annexe A : Espaces normés et topologie	265
A.1	Espaces vectoriels normés (e.v.n.)	265
A.1.1	Définition et exemples	265
A.1.2	Application linéaire continue	266
A.1.3	Normes équivalentes	267
A.2	Topologie	268
A.2.1	Voisinage. Ouvert	268
A.2.2	Fermé. Adhérence. Densité	272

Éléments d'analyse fonctionnelle

Cet ouvrage, rédigé par deux enseignants de l'INSA de Lyon, présente de façon claire et didactique les éléments fondamentaux d'analyse dans les espaces fonctionnels: transformations de Laplace, distributions et calcul opérationnel, espaces de Hilbert, problème de Sturm-Liouville et méthode variationnelle (éléments finis).

Plus d'une quarantaine d'exemples d'application, choisis dans les domaines variés de l'ingénieur, illustrent l'exposé: chaleur présente dans un mur, déformations d'une membrane, vibrations d'un immeuble soumis à un séisme, amplificateur bouclé, etc. Chacun d'eux est traité de façon exhaustive, de la modélisation à la solution numérique, et montre l'efficacité des méthodes abstraites. Les auteurs développent en outre une théorie spectrale élémentaire des opérateurs compacts auto-adjoints.

Cet ouvrage s'adresse tout spécifiquement aux élèves ingénieurs et aux étudiants de Licence/Master en mathématiques, ainsi qu'aux ingénieurs praticiens à la recherche d'une référence dans le domaine.

Jean-Marc Gilsinger, agrégé de l'Ecole normale supérieure de Cachan, a été enseignant à l'Institut national des sciences appliquées (INSA) de Lyon en premier cycle, ainsi qu'aux départements de Génie mécanique et de Génie civil et urbanisme.

Mohammed Jaï est docteur de l'Université de Lyon, chercheur au laboratoire Institut Camille Jordan et maître de conférence à l'INSA de Lyon. Il enseigne les mathématiques en premier cycle, notamment en Génie électrique, Génie civil et Génie mécanique et développement. Ses recherches portent sur la modélisation mathématique et la résolution numérique en mécanique des films minces.

ISBN 978-2-88074-877-7



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

9 782880 748777 >

Éléments d'analyse fonctionnelle

Jean-Marc Gilsinger & Mohammed Jaï

Cet ouvrage, rédigé par deux enseignants de l'INSA de Lyon, présente de façon claire et didactique les éléments fondamentaux d'analyse dans les espaces fonctionnels: transformations de Laplace, distributions et calcul opérationnel, espaces de Hilbert, problème de Sturm-Liouville et méthode variationnelle (éléments finis).

Plus d'une quarantaine d'exemples d'application, choisis dans les domaines variés de l'ingénieur, illustrent l'exposé: chaleur présente dans un mur, déformations d'une membrane, vibrations d'un immeuble soumis à un séisme, amplificateur bouclé, etc. Chacun d'eux est traité de façon exhaustive, de la modélisation à la solution numérique, et montre l'efficacité des méthodes abstraites. Les auteurs développent en outre une théorie spectrale élémentaire des opérateurs compacts auto-adjoints.

Cet ouvrage s'adresse tout spécifiquement aux élèves ingénieurs et aux étudiants de Licence/Master en mathématiques, ainsi qu'aux ingénieurs praticiens à la recherche d'une référence dans le domaine.

Jean-Marc Gilsinger, agrégé de l'École normale supérieure de Cachan, a été enseignant à l'Institut national des sciences appliquées (INSA) de Lyon en premier cycle, ainsi qu'aux départements de Génie mécanique et de Génie civil et urbanisme.

Mohammed Jaï est docteur de l'Université de Lyon, chercheur au laboratoire Institut Camille Jordan et maître de conférence à l'INSA de Lyon. Il enseigne les mathématiques en premier cycle, notamment en Génie électrique, Génie civil et Génie mécanique et développement. Ses recherches portent sur la modélisation mathématique et la résolution numérique en mécanique des films minces.

ISBN 978-2-88074-877-7



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

9 782880 748777 >