

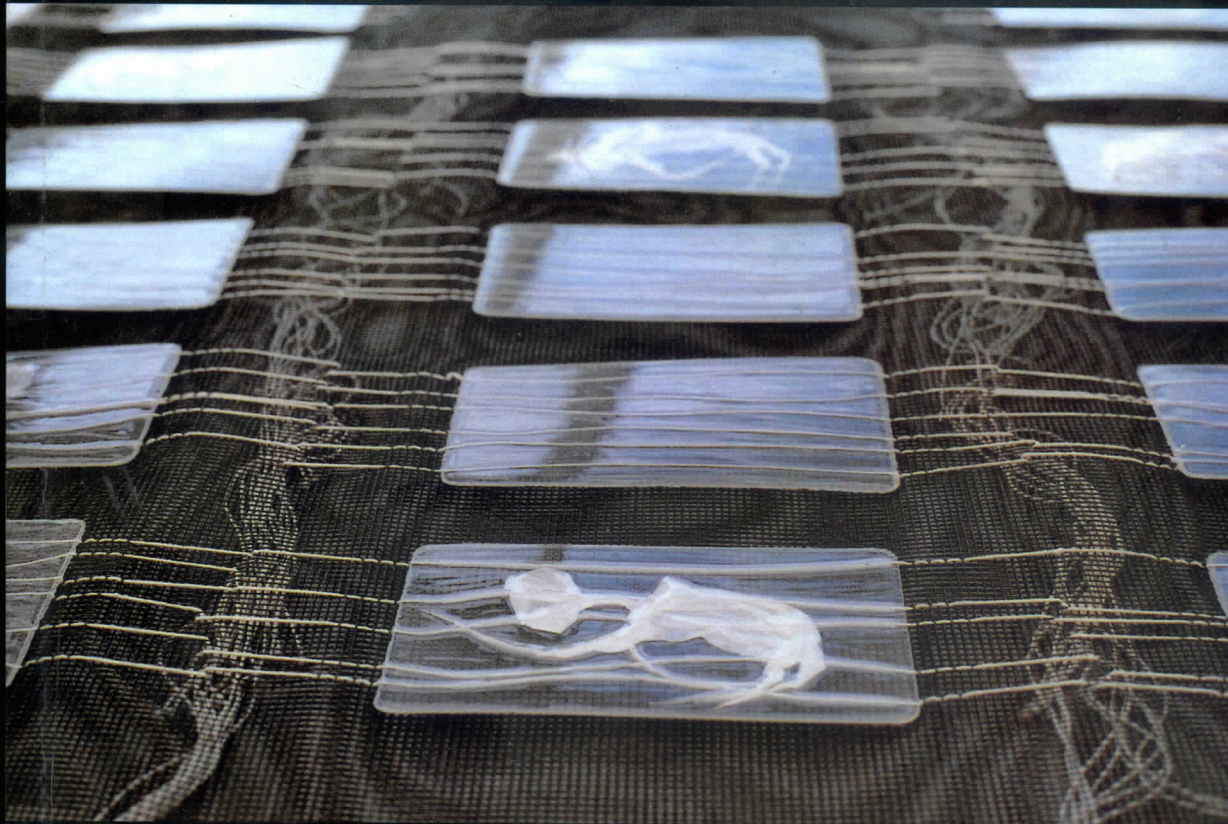
Enseignement des mathématiques

Algèbre linéaire

**Aide-mémoire, exercices
et applications**

Deuxième édition

Robert C. Dalang
Amel Chaabouni



Presses polytechniques et universitaires romandes

Table des matières

Avant-propos	v
Aide-mémoire et exercices	1
1 Systèmes linéaires	3
Aide-mémoire : Matrice associée à un système linéaire, solution générale d'un système, opérations élémentaires sur les lignes, méthode de résolution de Gauss, systèmes homogènes, systèmes inhomogènes.	3
Exercices	5
2 Calcul matriciel	11
Aide-mémoire : Somme et produit de matrices, transposée d'une matrice, matrices inversibles, opérations matricielles par blocs, matrices diagonales, triangulaires et symétriques, relations avec les systèmes linéaires.	11
Exercices	14
3 Déterminants	23
Aide-mémoire : Définition, propriétés, développements suivant une ligne ou une colonne, règle de Cramer, calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode des cofacteurs.	23
Exercices	25
4 Transformations de l'espace	31
Aide-mémoire : L'espace de dimension n , interprétations géométriques, équations paramétriques de droites et de plans, transformations affines et matricielles, translations, homothéties et similitudes, ensemble image, composition de transformations.	31
Exercices	33

5	Produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n	37
	Aide-mémoire : Produit scalaire euclidien, norme et distance euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwartz, théorème de Pythagore, projections orthogonales sur une droite ou un plan.	37
	Exercices	39
6	Espaces vectoriels	43
	Aide-mémoire : Espaces et sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires, familles libres ou liées, bases, notion de dimension, applications aux systèmes linéaires, théorème du rang.	43
	Exercices	48
7	Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire	61
	Aide-mémoire : Produits scalaires dans les espaces de dimension finie et infinie, bases orthonormales, théorème de Pythagore généralisé, projection orthogonale, inégalité de Cauchy-Schwartz, procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmid, problème de la meilleure approximation, solution d'un système linéaire au sens des moindres carrés, matrices orthogonales, changements de base.	61
	Exercices	66
8	Valeurs et vecteurs propres	79
	Aide-mémoire : Définitions et premières propriétés, polynôme caractéristique d'une matrice, diagonalisation d'une matrice, sous-espaces propres, diagonalisation orthogonale des matrices symétriques, diagonalisation en nombres complexes.	79
	Exercices	82
9	Transformations linéaires	89
	Aide-mémoire : Applications linéaires, noyau, image et rang d'une application linéaire, transformation de la matrice d'une application linéaire dans un changement de base, composition de transformations linéaires.	89
	Exercices	92
10	Résolution de systèmes différentiels	103
	Aide-mémoire : Systèmes différentiels linéaires du premier ordre, cas où la matrice du système est diagonalisable, recherche d'une solution particulière, exponentielle d'une matrice, solution générale, résolution à l'aide des nombres complexes.	103
	Exercices	106

Applications de l'algèbre linéaire	111
11 Utilisation des transformations affines en infographie	113
Les objets fractals, similitudes simples, ensembles auto-semblables, dimension de Hausdorff, un algorithme pour dessiner les ensembles auto-semblables, exemples du tamis de Sierpinski et du tapis de Sierpinski.	113
Exercices	121
12 Cryptographie conventionnelle	125
Chiffrement de César, chiffrement de Hill, calcul matriciel modulo 26, déchiffrement de Hill, décryptage par attaque à texte clair connu.	125
Exercices	135
13 Les codes correcteurs d'erreurs	139
Opérations sur $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, \mathcal{K} -espaces vectoriels, codes linéaires, rendement d'un code linéaire, matrice génératrice du code, matrice de contrôle, correction d'un mot reçu comportant une erreur simple, codes de Hamming.	139
Exercices	148
14 Chaînes de Markov	151
Matrice de transition, vecteur d'état, vecteur stationnaire, vecteur des visites, chaînes de Markov en infographie.	151
Exercices	157
15 Stéréogrammes	161
La perspective naturelle, paires stéréoscopiques, dessin d'une paire stéréographique correspondant à une surface, dessin d'un stéréogramme pour une surface d'équation $z = h(x, y)$	161
Exercices	178
16 Robustesse des réseaux informatiques	181
Graphes, matrice d'adjacence, graphes k -réguliers, connexité, bord, lien entre robustesse et valeurs propres, inégalité de Cheeger-Buser.	181
Exercices	194
Révision	199
17 Exercices de révision	201

Solutions des exercices	211
1 Systèmes linéaires	213
2 Calcul matriciel	219
3 Déterminants	229
4 Transformations de l'espace	235
5 Produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n	239
6 Espaces vectoriels	243
7 Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire	255
8 Valeurs et vecteurs propres	269
9 Transformations linéaires	279
10 Résolution de systèmes différentiels	293
11 Utilisation des transformations affines en infographie	299
12 Cryptographie conventionnelle	303
13 Les codes correcteurs d'erreurs	309
14 Chaînes de Markov	313
15 Stéréogrammes	319
16 Robustesse des réseaux informatiques	323
17 Exercices de révision	331
Bibliographie	347

Algèbre linéaire

Aide-mémoire, exercices et applications

Ce volume présente d'abord les notions d'algèbre linéaire indispensables aux étudiants ingénieurs et généralement abordées au cours de la première année du cycle universitaire. Pour faciliter l'assimilation progressive de la matière, chaque chapitre est accompagné d'une grande variété d'exercices. Pour la majorité de ceux-ci, un corrigé est donné à la fin du livre. Cette matière est ensuite illustrée par six applications de l'algèbre linéaire à des thèmes qui sont de nature à montrer à l'étudiant l'utilité de la théorie. Comment dessiner une fractale ou réaliser un stéréogramme ? Que sont les codes correcteurs d'erreurs, ou les premières techniques de cryptographie ? Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov ? Comment décider si un réseau informatique est robuste ? Ces sujets, qui utilisent de près les notions d'algèbre linéaire, sont abordés de manière accessible et sont également accompagnés d'exercices. ■ Cette **deuxième édition** comporte un chapitre supplémentaire d'application de l'algèbre linéaire, avec exercices et solutions.



Après des études de mathématiques, puis un doctorat à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, **Robert C. Dalang** fait carrière aux Etats-Unis : il est nommé professeur assistant à l'Université de Californie, Berkeley, puis professeur associé à Tufts University, Boston. Depuis 1995, il est professeur à l'EPFL. Il y enseigne, au premier cycle, l'algèbre linéaire à différentes sections d'ingénieurs et, aux deuxième et troisième cycles, les probabilités et les processus stochastiques. Ses travaux de recherche concernent la théorie des probabilités et des processus stochastiques ainsi que les applications de ces théories.

Amel Chaabouni obtient un DEA en mathématiques à l'Université de Tunis et y soutient, après des travaux de recherche effectués à l'Université de Genève, une thèse de troisième cycle en analyse harmonique. Elle travaille ensuite comme maître assistante à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis. Depuis 1996, elle est assistante puis chargée de cours à la Section de Mathématiques de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, où elle s'occupe principalement de l'enseignement de l'algèbre linéaire.

ISBN 978-2-88074-616-2



9 782880 746162