

043778

MATHÉMATIQUES

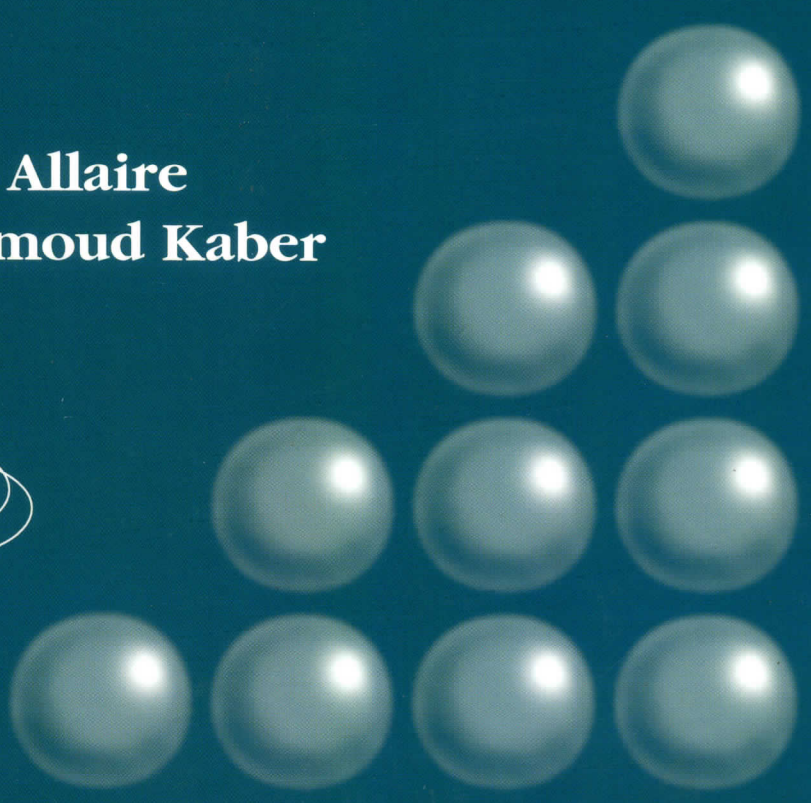
2^e cycle

Cours et exercices

Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

Algèbre linéaire numérique

Grégoire Allaire
Sidi Mahmoud Kaber



M862

043778

(2)

MATHÉMATIQUES POUR LE 2^E CYCLE

Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILBOSSIAN



ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE

Grégoire ALLAIRE

Professeur à l'École polytechnique

Sidi Mahmoud KABER

Maître de conférences
à l'Université Paris VI



Table des matières

I Algèbre linéaire	1
1 Rappels d'algèbre linéaire	3
1.1 Espaces vectoriels	3
1.2 Applications linéaires	5
1.3 Représentation matricielle	6
1.4 Produit scalaire	11
1.5 Produit hermitien	13
1.6 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	15
1.7 Trace et déterminants	16
1.8 Matrices définies par blocs	18
1.9 Matrices définies positives	21
1.10 Exercices	26
2 Réduction des matrices	31
2.1 Théorie spectrale des matrices	31
2.2 Triangularisation des matrices	37
2.3 Diagonalisation des matrices	39
2.4 Valeurs singulières d'une matrice	42
2.5 Exercices	47
3 Normes, suites et séries de matrices	51
3.1 Normes matricielles et subordonnées	51
3.2 Normes subordonnées pour des matrices rectangulaires	58
3.3 Suites et séries de matrices	60
3.4 Exercices	62
II Résolution numérique de systèmes linéaires	65
4 Introduction à l'algorithmique	67
4.1 Algorithmes et pseudo-langage	67
4.2 Compte d'opérations ou complexité	70
4.3 L'algorithme de Strassen	70
4.4 Equivalence d'opérations	72
4.5 Exercices	74
5 Systèmes linéaires	77
5.1 Systèmes linéaires carrés	77
5.2 Systèmes linéaires sur- ou sous-déterminés	81
5.3 Le problème modèle de la discrétisation d'une équation différentielle	82
5.4 Le problème modèle de l'approximation aux moindres carrés	85
5.5 Résolution numérique	88
5.5.1 Conditionnement d'une matrice	89

5.5.2	Retour au problème modèle de la discrétisation d'une équation différentielle	94
5.5.3	Calcul approché du conditionnement	96
5.5.4	Préconditionnement	98
5.6	Exercices	99
III Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires		105
6	Méthodes directes de résolution de $Ax=b$	107
6.1	Méthode d'élimination de Gauss	107
6.2	Méthode de la décomposition LU	113
6.2.1	Algorithme numérique	116
6.2.2	Compte d'opérations	116
6.2.3	Calcul pratique de la factorisation LU	118
6.2.4	Le cas des matrices bandes.	119
6.3	Méthode de Cholesky	120
6.3.1	Calcul pratique de la factorisation de Cholesky	122
6.3.2	Algorithme numérique	123
6.3.3	Compte d'opérations	123
6.4	Méthode de la factorisation QR	125
6.4.1	Compte d'opérations.	126
6.5	Complexité	127
6.6	Exercices	127
7	Problème des moindres carrés	135
7.1	Motivations et applications	135
7.2	Principaux résultats	136
7.3	Résolution numérique	139
7.3.1	Conditionnement du problème des moindres carrés	139
7.3.2	Méthode de l'équation normale	141
7.3.3	Méthode de la factorisation QR	142
7.3.4	Algorithme de Householder	146
7.4	Exercices	150
IV Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires		153
8	Quelques méthodes itératives de base	155
8.1	Cadre général	155
8.2	Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation	159
8.2.1	Méthode de Jacobi	159
8.2.2	Méthode de Gauss-Seidel	160
8.2.3	Méthode de relaxation (SOR)	161
8.3	Comparaison des méthodes pour des matrices tridiagonales	162
8.4	Etude du problème du Laplacien	165
8.5	Programmation des méthodes	167
8.6	Méthodes définies par blocs	168
8.7	Exercices	170

9	Méthode du gradient conjugué	175
9.1	La méthode du gradient	175
9.2	Interprétation géométrique	177
9.3	Quelques idées de généralisation	180
9.4	Définition théorique de la méthode du gradient conjugué	182
9.5	Algorithme du gradient conjugué	185
9.5.1	Algorithme numérique	188
9.5.2	Compte d'opérations	189
9.5.3	Vitesse de convergence	189
9.5.4	Préconditionnement	191
9.5.5	Polynômes de Tchebycheff.	195
9.6	Exercices	197
V	Calcul des valeurs et vecteurs propres	201
10	Motivations et principes de calcul	203
10.1	Motivations	203
10.1.1	Vibrations d'un système mécanique	203
10.1.2	La corde vibrante	205
10.2	Principe du min-max	206
10.3	Conditionnement	209
10.4	Exercices	211
11	Méthodes de calcul de valeurs propres	215
11.1	Méthode de la puissance	215
11.2	Méthode de Jacobi	219
11.3	Méthode de Givens-Householder	223
11.4	Méthode de Lanczos	228
11.5	Exercices	233
	Bibliographie	235
	Liste des algorithmes	237
	Index	239

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques. En particulier, les mathématiques appliquées en font un grand usage lorsqu'il s'agit de calculer numériquement les solutions de nombreux problèmes ayant pour origine les sciences physiques ou mécaniques, l'économie, la chimie, les sciences du vivant, etc. L'objectif de ce cours de licence ou de premières années d'écoles d'ingénieurs est donc d'exposer l'algèbre linéaire numérique, c'est-à-dire la théorie et les algorithmes pratiques de résolution, à l'aide d'ordinateurs, de problèmes d'algèbre linéaire. Il s'agit principalement de résoudre des systèmes linéaires et de calculer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice. L'originalité de ce cours est de proposer une approche expérimentale de l'algèbre linéaire : des exercices pratiques à effectuer sur un ordinateur accompagnent chaque chapitre. Ces exercices utilisent le logiciel de calcul numérique Scilab de l'INRIA qui facilite la programmation informatique des algorithmes étudiés.



9 782729 810016

ISBN 2-7298-1001-3