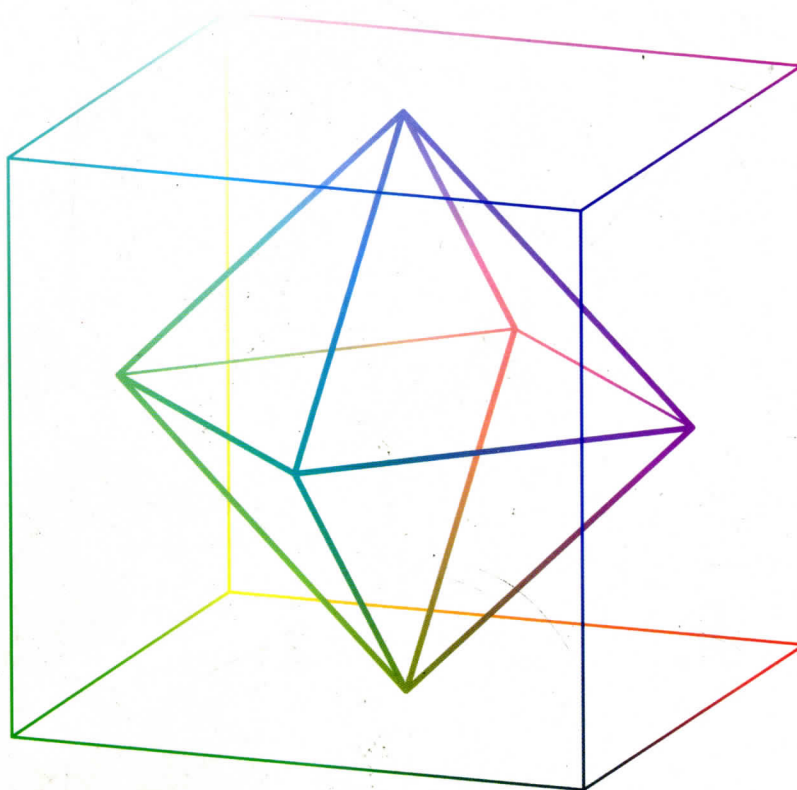


COURS DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Volume 1 ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

• Sous la direction de J.-P. RAMIS, A. WARUSFEL et F. MOULIN •

Cours et exercices corrigés



- ▶ L3, Master
- ▶ Concours de recrutement
- ▶ Écoles d'ingénieurs



de boeck

M854/vol. 1

044025

(3)



COURS DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Volume 1 ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- Sous la direction de J.-P. RAMIS, A. WARUSFEL et F. MOULIN •

Cours et exercices corrigés



de boeck

Table des matières du premier volume

Préface du premier volume	xv
Première partie ALGÈBRE	1
Chapitre 1 Groupes	3
1 Exemples de groupes	3
1.1 Quelques rappels	3
1.2 Produits directs, produits semi-directs	5
1.3 Groupes diédraux	9
1.4 Groupes abéliens finis	12
1.5 Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$	14
1.6 Exemples de groupes simples	17
2 Théorèmes de Sylow et applications	21
2.1 Théorèmes de Sylow	21
2.2 Quelques applications	24
2.3 Groupes d'ordre au plus égal à 15	26
3 Groupes résolubles	28
3.1 Définition et premières propriétés	28
3.2 Théorème de Jordan-Hölder	31
4 Groupes libres. Générateurs et relations	33
4.1 Introduction	33
4.2 Groupes libres	34
4.3 Groupes définis par générateurs et relations	38
4.4 Algorithme de Todd-Coxeter	42
5 Représentations linéaires, caractères	45
5.1 Représentations linéaires	45
5.2 Caractères	48
5.3 Relations d'orthogonalité	49

5.4	Tables de caractères	53
5.5	Cas des groupes compacts	57
6	Sous-groupes finis de $\mathcal{O}(R^2)$ et $\mathcal{SO}(R^3)$	61
Chapitre 2 Corps		73
1	Extensions de corps	73
1.1	Notion d'extension. Degré	73
1.2	Éléments et extensions algébriques	76
2	Corps de décomposition. Clôture algébrique	81
2.1	Corps de rupture, corps de décomposition	82
2.2	Clôture algébrique	86
2.3	Corps parfaits, théorème de l'élément primitif	88
2.4	Normes et traces	92
3	Quelques exemples	94
3.1	Extensions quadratiques.	95
3.2	Corps cyclotomiques	97
4	Corps finis	101
4.1	Existence et unicité	101
4.2	Compléments	104
4.3	Codes linéaires	108
5	Quelques problèmes classiques	112
5.1	Exemples de groupes de Galois	112
5.2	Constructibilité à la règle et au compas	116
5.3	Résolubilité par radicaux	120
Chapitre 3 Algèbre multilinéaire		135
1	Produit tensoriel. Algèbre tensorielle	136
1.1	Définition et propriétés du produit tensoriel	136
1.2	Algèbre tensorielle. Tenseurs mixtes	147
2	Algèbre symétrique	152
2.1	Définition et propriétés	152
2.2	Tenseurs symétriques ou antisymétriques	155
3	Algèbre extérieure	157
3.1	Définition et propriétés	157
3.2	Dualité dans l'algèbre extérieure	163
3.3	Interprétation géométrique	166

4	Formes bilinéaires alternées. Groupe symplectique	168
4.1	Classification des formes bilinéaires alternées	168
4.2	Groupe symplectique	173
	Chapitre 4 Algèbre commutative	187
1	Modules sur un anneau commutatif	188
1.1	Le langage des modules	188
1.2	Applications linéaires	193
1.3	Rudiments de fonctorialité	200
2	Conditions de finitude	205
2.1	Modules de présentation finie	205
2.2	Modules sur les anneaux noethériens	210
2.3	Bases de Gröbner	213
3	Modules sur les anneaux principaux	221
3.1	Modules libres de rang fini sur un anneau principal	221
3.2	Modules de type fini sur un anneau principal	227
3.3	Applications à la réduction des endomorphismes	233
	Chapitre 5 Théorie des nombres	251
1	Approximation diophantienne	251
1.1	Principes généraux	252
1.2	Approximation à l'aide des fractions continues	265
2	Théorie analytique des nombres	274
2.1	La distribution des nombres premiers	274
2.2	Fonctions arithmétiques	281
2.3	Séries de Dirichlet	292
	Chapitre 6 Combinatoire avancée	303
1	Séries génératrices et asymptotique des coefficients	304
1.1	Exemples divers	304
1.2	Séries génératrices rationnelles	314
1.3	Permutations	323
1.4	Objets composés	328
2	Partitio numerorum	334
2.1	La série génératrice du nombre de partitions	335
2.2	Calcul quantique élémentaire	342

2.3	La formule du triple produit de Jacobi	346
3	Arbres	348
3.1	Arbres binaires	348
3.2	Arbres binaires de recherche	354
3.3	Termes et expressions	360
3.4	Algorithmes d'évaluation	365
4	Calcul booléen et circuits logiques	367
4.1	Fonctions booléennes et formules logiques	367
4.2	Formes normales	372
5	Raisonnements combinatoires en mathématiques	377
5.1	Graphes, polyèdres, triangulations	378
5.2	Arbres et $SL_2(\mathbb{Z})$	379
	Chapitre 7 Analyse numérique matricielle	395
1	Méthode de Newton pour les systèmes non linéaires	396
1.1	Rappels	396
1.2	Méthode de Newton	396
1.3	Analyse d'erreur et de convergence	398
1.4	Mise en œuvre de la méthode de Newton	400
1.5	Méthode de point fixe	402
2	Méthodes d'optimisation sans contrainte	403
2.1	Problème étudié - rappels	403
2.2	Méthode de Newton	404
2.3	Méthodes de descente	406
2.4	Retour sur la résolution de $F(x) = 0$	410
3	Méthodes de gradient pour la résolution itérative des systèmes linéaires	411
3.1	Introduction	411
3.2	Méthode du gradient	412
3.3	Méthode du gradient conjugué	416
3.4	Premières propriétés de l'algorithme du gradient conjugué	418
3.5	Analyse de convergence de l'algorithme du gradient conjugué	420
4	Problèmes de moindres carrés	425
4.1	Introduction	425
4.2	Étude mathématique	428
4.3	Calcul numérique	429

4.4	Décomposition en valeurs singulières	436
5	Approximations de valeurs propres	441
5.1	Rappels et compléments	441
5.2	Méthode de la puissance itérée	443
5.3	Méthode de la puissance inverse	445
5.4	Calcul simultané de toutes les valeurs propres : la méthode QR	447
5.5	Détails pratiques sur la méthode QR	451
Deuxième partie GÉOMÉTRIE		467
Chapitre 1 Géométrie affine et euclidienne		469
1	Compléments de géométrie affine	469
1.1	Quelques rappels	470
1.2	Coordonnées barycentriques	475
1.3	Quelques théorèmes classiques	477
2	Espace affines euclidiens. Isométries. Similitudes	481
2.1	Généralités	481
2.2	Isométries : définition et premières propriétés	485
2.3	Angles	489
2.4	Classification des isométries en dimension 2 et 3	501
2.5	Similitudes	509
2.6	Utilisation des nombres complexes dans le plan	512
2.7	Exemples de pavages du plan	515
Chapitre 2 Polyèdres réguliers, cercles et sphères		527
1	Polyèdres réguliers	527
1.1	Définition générale. Polygones réguliers	527
1.2	Polyèdres réguliers de l'espace : construction	531
1.3	Polyèdres réguliers de l'espace : classification	538
1.4	Un exemple de polyèdre semi-régulier	542
2	Cercles et sphères	544
2.1	Généralités	544
2.2	Inversion	548
2.3	Groupe circulaire	555
2.4	Pôles et polaires	557
2.5	Rudiments de trigonométrie sphérique	559

Chapitre 3	Introduction à la géométrie projective	569
1	Droites projectives, homographies	569
1.1	Rappels sur les homographies	569
1.2	Droite projective complexe	572
1.3	Compléments sur le demi-plan de Poincaré	577
2	Introduction à la géométrie projective	581
2.1	Généralités	581
2.2	Liaison affine-projectif	586
2.3	Dualité dans les espaces projectifs	591
2.4	Coniques et quadriques projectives	595
2.5	Faisceaux de cercles	610
Chapitre 4	Initiation à la géométrie algébrique	623
1	Courbes algébriques planes	627
1.1	Géométrie affine	627
1.2	Étude locale des courbes planes	642
1.3	Géométrie projective	653
2	Un peu de classification des courbes planes	661
2.1	Fonctions, morphismes, paramétrisations	661
2.2	Cubiques non singulières	670
3	Rudiments de géométrie algébrique affine	681
3.1	Ensembles algébriques affines	681
3.2	Le Nullstellensatz	684
3.3	Élimination	686
Chapitre 5	Convexes et polyèdres	699
1	Ensembles convexes	700
1.1	Rappels et compléments	700
1.2	Théorèmes de Carathéodory et de Helly	712
1.3	Ensembles convexes et hyperplans	718
1.4	Cônes convexes	736
2	Polyèdres convexes	758
2.1	Généralités et théorème de structure	758
2.2	Le théorème fondamental	765
2.3	Une autre preuve du théorème de Helly	774

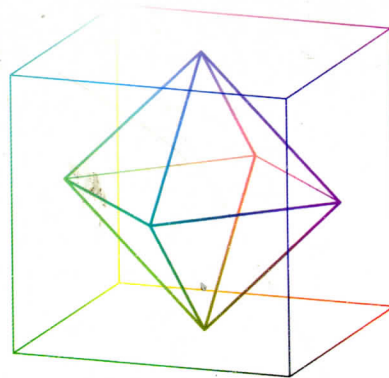
Chapitre 6 Fonctions convexes et applications	785
1 Fonctions convexes	785
1.1 Propriétés des fonctions convexes	785
1.2 Fonctions duales. Transformation de Legendre-Fenchel	812
2 Introduction à la programmation convexe	834
2.1 Généralités	834
2.2 Recherche des points extrémaux pour un problème sous forme canonique	838
2.3 Problèmes duaux	840
Troisième partie INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE	853
Chapitre 1 Calcul différentiel	855
1 Calcul différentiel dans les espaces de Banach	856
1.1 Applications différentiables	856
1.2 Théorème d'inversion locale - Théorème des fonctions implicites	866
1.3 Dérivées d'ordre supérieur	873
1.4 Problèmes d'extrema	886
2 Formes différentielles	892
2.1 Champs de vecteurs	892
2.2 Champs de formes	897
2.3 Intégration d'une forme différentielle	903
2.4 La dérivée extérieure	920
2.5 Théorème de Stokes	930
Chapitre 2 Courbes et surfaces	943
1 Enveloppes de droites	944
1.1 Enveloppe d'une famille de droites du plan	945
1.2 Enveloppe d'une famille de droites définies paramétriquement	949
1.3 Développées, développantes d'un arc plan	950
2 Le repère mobile	952
2.1 Repères	953
2.2 Le cas euclidien	958
3 Propriétés métriques locales des surfaces	968
3.1 Surfaces : rappels et notations	968
3.2 Première forme fondamentale	991
3.3 Deuxième forme fondamentale d'une surface	1010

3.4	Courbes tracées sur une surface	1034
3.5	Surfaces à courbure constante	1052
4	Repère mobile et formes différentielles	1054
4.1	Les formes différentielles ω^i et ω_i^j	1054
4.2	Application à l'étude des courbes et des surfaces	1056
5	Le point de vue des variétés différentiables	1076
5.1	Métrie Riemannienne sur un ouvert, isométries et applications conformes ..	1077
5.2	Surfaces abstraites	1080
	Indications	1097
	Index	1109

COURS DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

Volume 1 ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Cours et exercices corrigés



Cet ouvrage est le premier des trois volumes d'un cours complet de Mathématiques pures et appliquées. Il est centré sur l'algèbre (groupes, corps, algèbre commutative, calcul tensoriel) et la géométrie (géométrie classique, algébrique, différentielle) ; en relation avec ces thèmes on y trouvera aussi des développements sur l'arithmétique, les mathématiques discrètes, la convexité, l'analyse numérique matricielle et la théorie des surfaces.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants des troisième et quatrième années universitaires (L3, M1, préparations au CAPES et à l'agrégation) ainsi qu'aux élèves des Écoles d'Ingénieurs.

C'est un livre de référence donnant des définitions précises et des preuves complètes, il est conçu pour être utile plusieurs années.

Les auteurs de ce cours, représentant un large éventail d'expériences pédagogiques, ont eu le souci de bien traiter les sujets fondamentaux tout en donnant une attention toute particulière aux applications (internes ou externes aux mathématiques). Ils se sont attachés à mettre en évidence l'unité des mathématiques en décloisonnant les domaines et en présentant diverses approches du même sujet. De nombreuses indications historiques retracent la genèse des principales idées.

Le cours est illustré de nombreux exemples et exercices de difficulté graduée, avec des solutions complètes. Le lecteur trouvera aussi à la fin de chaque chapitre une liste d'exercices complémentaires avec indications de solution ; les corrigés de certains d'entre eux sont consultables sur le site internet de l'éditeur.

Sous la direction de

Jean-Pierre Ramis, membre de l'Institut (Académie des sciences), membre de l'Institut Universitaire de France, professeur honoraire à l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier, a été directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques Avancées (IRMA) de Strasbourg puis de l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

André Warusfel, a été professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis le Grand à Paris et inspecteur général de Mathématiques.

François Moulin, professeur de chaires supérieures au lycée Sainte-Geneviève (spéciale MP*).

ALGGEO
ISBN 978-2-8041-1642-2



9 782804 116422

www.deboeck.com