

Stéphane BALAC
Frédéric STURM

$$E = \sum_{r=0}^{\infty} (\Omega_0)^r \cdot S = S + \Omega_0 \cdot S + (\Omega_0)^2 \cdot S + \dots$$

$$\Psi(r, t - dt) - 2 \cdot \Psi(r, t) + \Psi(r, t + dt)$$

$$\frac{dt^2}{dt^2} \Psi(r, t - dt) - 2$$

$$\Sigma(r) = \frac{1}{2n_r^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha_r & 1 & 1 \\ \alpha_r & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha_r \\ 1 & 1 & \alpha_r & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_r \\ Y_r \\ Y_r \\ Y_r \\ \beta_r \end{pmatrix}$$

ALGÈBRE

et analyse

Cours de mathématiques de première année
avec exercices corrigés

2^e édition revue et augmentée

M852

043772

(5)

METIS LyonTech



Algèbre et analyse

Cours de mathématiques de première année
avec exercices corrigés

2^e édition revue et augmentée

Stéphane BALAC
Frédéric STURM

Table des matières

Préface	v
Avant-propos	vii
Table des matières	ix

PRÉLIMINAIRES

1

1 Introduction à la logique mathématique

3

1.1 Assertion et prédicat 3

1.2 Les connecteurs logiques 4

1.2.1 Négation, conjonction, disjonction 5

1.2.2 Implication, équivalence 6

1.2.3 Propriétés 7

1.3 Les quantificateurs mathématiques 12

1.3.1 Quantificateurs simples 12

1.3.2 Quantificateurs multiples 15

+ 1.4 Les différents modes de démonstration en mathématique 16

1.4.1 Raisonnement par hypothèse auxiliaire 16

1.4.2 Raisonnement par contraposée 16

1.4.3 / Raisonnement par l'absurde 17

1.4.4 / Raisonnement par contre-exemple 19

1.4.5 Raisonnement par récurrence 19

Algebre

X/ 2 Structures fondamentales

23

2.1 Ensemble et sous-ensemble 23

2.1.1 Généralités sur les ensembles 23

2.1.2 Partie, sous-ensemble 24

2.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble 25

2.1.4 Opérations sur les ensembles 27

2.1.5 Produit cartésien 31

- 2.2 Relation, fonction, application 33
 - 2.2.1 Relation 33
 - 2.2.2 Fonction 34
 - Algebre* * 2.2.3 Application 36
 - + 2.2.4 Injection, surjection, bijection 42
 - 2.2.5 Puissance du dénombrable, puissance du continu 52
 - 2.2.6 Restriction et prolongement d'une application 54
 - 2.2.7 Relation d'équivalence sur un ensemble 57
- 2.3 Structures algébriques élémentaires 58
 - 2.3.1 Loi de composition interne 58
 - 2.3.2 Structure de groupe 63
 - 2.3.3 Structure d'anneau 65
 - 2.3.4 Structure de corps 79
- 2.4 Exercices de synthèse 82
- 2.5 Solution des exercices 83

Analyse **ENSEMBLES NUMÉRIQUES FONDAMENTAUX 91**

- 3 Le corps des réels 93**
 - 3.1 Généralités 93
 - 3.1.1 Le corps des rationnels 93
 - 3.1.2 Relation d'ordre sur un ensemble 94
 - + 3.1.3 Bornes supérieure et inférieure 95
 - 3.1.4 Les insuffisances du corps des rationnels 97
 - 3.1.5 Le corps des réels 99
 - 3.2 Propriétés des nombres réels 102
 - 3.2.1 Propriétés calculatoires 102
 - 3.2.2 La valeur absolue 107
 - 3.2.3 Partie entière et racine n-ième 110
 - 3.2.4 Propriétés fondamentales 113
 - 3.3 Topologie de la droite réelle 115
 - 3.3.1 Intervalles 116
 - 3.3.2 Ensemble ouvert et ensemble fermé 116
 - 3.3.3 Intérieur et adhérence d'un ensemble 118
 - 3.3.4 La droite numérique achevée 120
 - 3.4 Exercices de synthèse 121
 - 3.5 Solution des exercices 122

4	Le corps des complexes	129
4.1	Structure de corps commutatif sur \mathbb{R}^2	129
4.1.1	Première approche	129
4.1.2	Seconde approche	131
4.1.3	Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R} \times \{0\}$	132
4.2	Le corps des nombres complexes	133
4.2.1	Définition de l'ensemble des nombres complexes	133
4.2.2	Conjugaison d'un nombre complexe	137
4.3	Module et argument	137
4.3.1	Module d'un nombre complexe	137
4.3.2	Argument d'un nombre complexe	139
4.3.3	Notation exponentielle complexe et forme polaire	141
4.3.4	Représentation géométrique	144
4.4	Racines d'un nombre complexe	145
4.4.1	Racines deuxièmes d'un nombre complexe	145
4.4.2	Calcul algébrique des racines d'un trinôme	148
4.4.3	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	150
4.5	Application à la trigonométrie	157
4.5.1	Rappels des formules de trigonométrie	157
4.5.2	Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$	160
4.5.3	Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$	162
4.6	Solution des exercices	164
5	Suites numériques	171
5.1	Définitions et généralités	171
5.1.1	Convergence d'une suite numérique	172
5.1.2	Suites bornées	178
5.2	Propriétés	180
5.2.1	Propriétés algébriques pour les suites numériques	180
5.2.2	Autres propriétés algébriques pour les suites réelles	182
5.2.3	Propriétés d'ordre pour les suites réelles	184
5.3	Monotonie	187
5.3.1	Suites réelles monotones	187
5.3.2	Suites adjacentes	191
5.4	Suites extraites	194
5.5	Suites de Cauchy	198

5.6	Suites usuelles	201
5.6.1	Suites arithmétiques et suites géométriques	201
5.6.2	Suites récurrentes	204
5.7	Exercices de synthèse	204
5.8	Solution des exercices	206

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES **219**

6	L'anneau des polynômes	221
6.1	Définition de l'ensemble des polynômes	221
6.1.1	Polynôme formel	221
6.1.2	Valuation et degré d'un polynôme	222
6.2	Structures algébriques sur les polynômes	222
6.2.1	Addition de polynômes	222
6.2.2	Multiplication d'un polynôme par un élément de \mathbb{K}	224
6.2.3	Multiplication de polynômes	224
6.2.4	Notion d'indéterminée	226
6.2.5	Fonction polynomiale	227
6.3	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	228
6.3.1	Division euclidienne	228
6.3.2	Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$	232
6.3.3	Division selon les puissances croissantes	233
6.4	Dérivation des polynômes	236
6.4.1	Définition d'un polynôme dérivé	236
6.4.2	Dérivées successives - formule de Taylor	238
6.5	Racines d'un polynôme	241
6.5.1	Définition d'une racine	241
6.5.2	Multiplicité d'une racine	244
6.5.3	Multiplicité d'une racine et polynômes dérivés	246
6.5.4	Relations entre coefficients et racines d'un polynôme	248
6.6	Étude des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$	250
6.6.1	Polynômes de $\mathbb{C}[X]$	251
6.6.2	Polynômes de $\mathbb{R}[X]$	252
6.7	Exercices de synthèse	256
6.8	Solution des exercices	258

7	Le corps des fractions rationnelles	273
7.1	Les fractions rationnelles	273
7.1.1	Définition d'une fraction rationnelle	273
7.1.2	Racines et pôles d'une fraction rationnelle	277
7.2	Décomposition d'une fraction rationnelle	278
7.2.1	Partie entière d'une fraction rationnelle	278
7.2.2	Décomposition en éléments simples sur \mathbb{K}	279
7.2.3	Décomposition sur \mathbb{C}	284
7.2.4	Décomposition sur \mathbb{R}	286
7.3	Techniques de décomposition	287
7.3.1	Cas d'un pôle simple	288
7.3.2	Cas d'un pôle multiple	289
7.3.3	Cas d'un facteur irréductible du second degré	292
7.3.4	Techniques de réduction du nombre des coefficients	296
7.4	Exercices de synthèse	300
7.5	Solution des exercices	301

ALGÈBRE LINÉAIRE **307**

8	Les espaces vectoriels	309
8.1	Structure d'espace vectoriel	309
8.1.1	Définition d'un espace vectoriel	309
8.1.2	Principaux exemples d'espaces vectoriels	310
8.1.3	Propriétés élémentaires	314
8.1.4	Combinaison linéaire	315
8.2	Structure de sous-espace vectoriel	317
8.2.1	Définition d'un sous-espace vectoriel	317
8.2.2	Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels	321
8.2.3	Sous-espace engendré par une famille finie	322
8.2.4	Propriétés	324
8.2.5	Sous-espace engendré par une famille infinie	327
8.3	Indépendance linéaire	328
8.3.1	Famille liée et famille libre	328
8.3.2	Base algébrique d'un espace vectoriel	335
8.4	Espace vectoriel de dimension finie	339

Algèbre

8.4.1	Définition d'un espace vectoriel de dimension finie	339
8.4.2	Dimension d'un espace vectoriel	341
8.4.3	Rang d'une famille finie de vecteurs	344
8.4.4	La méthode des zéros échelonnés	345
8.5	Somme de sous-espaces vectoriels	350
8.5.1	Somme de deux sous-espaces vectoriels	351
8.5.2	Cas de sous-espaces de dimensions finies	355
8.6	Exercices de synthèse	358
8.7	Solution des exercices	359
9	Les applications linéaires	369
9.1	Application linéaire	369
9.1.1	Définition d'une application linéaire	369
9.1.2	Propriétés	375
9.1.3	Endomorphismes particuliers	376
9.2	Image et noyau	381
9.2.1	Image d'une application linéaire	381
9.2.2	Noyau d'une application linéaire	382
9.3	Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire	387
9.3.1	Image d'une famille génératrice	387
9.3.2	Image d'une famille libre	389
9.3.3	Image d'une base	391
9.4	Rang d'une application linéaire	394
9.4.1	Rang d'une application linéaire	394
9.4.2	Théorème du rang	395
9.4.3	Conséquences du théorème du rang	397
9.5	Exercices de synthèse	400
9.6	Solution des exercices	401
10	Les matrices	415
10.1	Calcul matriciel	415
10.1.1	Définition d'une matrice	415
10.1.2	Opérations sur les matrices	418
10.1.3	Transposition de matrices	422
10.1.4	Cas particulier des matrices carrées	425
10.2	Matrices et applications linéaires	428

10.2.1	Matrice associée à une application linéaire	428
10.2.2	Écriture matricielle d'une égalité vectorielle	432
10.2.3	Application canoniquement associée à une matrice	436
10.2.4	Propriétés	438
10.3	Rang d'une matrice rectangulaire	443
10.3.1	Définition du rang d'une matrice	443
10.3.2	Lien entre le rang d'une matrice et celui de l'application linéaire associée	445
10.3.3	Lien entre le rang d'une matrice et celui de sa transposée	447
10.4	Matrices carrées inversibles	448
10.4.1	Définition d'une matrice inversible	448
10.4.2	Propriétés	452
10.5	Changement de bases	457
10.5.1	Définition d'une matrice de passage	457
10.5.2	Propriétés des matrices de passage	459
10.5.3	Changement de bases pour un vecteur	461
10.5.4	Changement de bases pour une application linéaire	464
10.5.5	Matrices équivalentes, matrices semblables	469
10.6	Exercices de synthèse :	473
10.7	Solution des exercices	474
11	Systèmes d'équations linéaires	487
11.1	Un outil pratique : le déterminant	487
11.1.1	Tel Monsieur Jourdain	487
11.1.2	Déterminant d'ordre 2	493
11.1.3	Déterminant d'ordre 3	495
11.1.4	Déterminant d'ordre n	500
11.1.5	Développement d'un déterminant	509
11.1.6	Propriétés des déterminants	511
11.2	Généralités sur les systèmes d'équations linéaires	515
11.2.1	Définition	515
11.2.2	Interprétation matricielle	516
11.2.3	Interprétation vectorielle	517
11.3	Résolution d'un système de Cramer	521
11.3.1	Définition	521
11.3.2	Les formules de Cramer	522

11.4	Résolution d'un système linéaire	525
11.4.1	Compatibilité d'un système linéaire	525
11.4.2	Le théorème de Rouché-Fontené	526
11.4.3	Méthode d'élimination de Gauss	527
11.4.4	Illustration avec des exemples	530
11.5	Exercices de synthèse	534
11.6	Solution des exercices	535
12	Réduction des endomorphismes	543
12.1	Éléments propres d'un endomorphisme	543
12.1.1	Valeurs propres et vecteurs propres	543
12.1.2	Caractérisation des valeurs propres	545
12.2	Sous-espaces propres	546
12.2.1	Définition	546
12.2.2	Somme de sous-espaces propres	547
12.3	Cas d'un espace de dimension finie	550
12.3.1	Écriture sous forme matricielle	550
12.3.2	Calcul des valeurs propres	551
12.3.3	Calcul des vecteurs propres	556
12.3.4	Illustration avec un exemple	559
12.4	Diagonalisation et trigonalisation	561
12.4.1	Diagonalisation d'un endomorphisme	561
12.4.2	Caractérisation de la diagonalisation en dimension finie	563
12.4.3	Trigonalisation d'un endomorphisme	569
12.4.4	Illustration avec un exemple	572
12.4.5	Complément : réduction de Jordan	575
12.5	Exercices de synthèse	577
12.6	Solution des exercices	578
	CALCUL DIFFÉRENTIEL	585
✓ 13	Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle	587
✓ 13.1	L'ensemble des applications de D dans \mathbb{R}	587
✓ 13.1.1	Propriétés algébriques	587
✓ 13.1.2	Monotonie, parité et périodicité	590
✓ 13.1.3	Applications bornées	593

13.2	Limites	597
13.2.1	Définitions	597
13.2.2	Propriétés	603
13.2.3	Opérations algébriques sur les limites	608
13.2.4	Limites usuelles	614
13.3	Continuité	616
13.3.1	Définitions et premières propriétés	616
13.3.2	Opérations algébriques sur les applications continues	622
13.3.3	Continuité sur un intervalle	623
13.3.4	Continuité uniforme	627
13.4	Étude des suites récurrentes	630
13.5	La dichotomie ou l'art de couper en deux	636
13.6	Exercices de synthèse	640
13.7	Solution des exercices	641
14	Fonctions usuelles	657
14.1	Application réciproque	657
14.2	Fonctions logarithmes	663
14.2.1	La fonction logarithme népérien	663
14.2.2	La fonction logarithme de base a	666
14.3	Fonctions exponentielles	667
14.3.1	La fonction exponentielle	667
14.3.2	La fonction exponentielle de base a	671
14.4	Fonctions puissances	672
14.5	Comparaison locale	674
14.6	Fonctions hyperboliques	676
14.7	Fonctions circulaires réciproques	682
14.7.1	La fonction arc-sinus	682
14.7.2	La fonction arc-cosinus	685
14.7.3	La fonction arc-tangente	687
14.8	Fonctions hyperboliques réciproques	690
14.8.1	La fonction argument sinus hyperbolique	690
14.8.2	La fonction argument cosinus hyperbolique	693
14.8.3	La fonction argument tangente hyperbolique	694
14.9	Exercices de synthèse	696
14.10	Solution des exercices	698

15 Comparaison locale de fonctions	717
15.1 Prépondérance et Domination	717
15.2 Équivalence	722
15.2.1 Définition et propriétés	722
15.2.2 Opérations sur les équivalents	725
15.2.3 Composition de fonctions équivalentes	729
15.2.4 Équivalents aux fonctions usuelles	731
15.2.5 Changement de variable	733
15.2.6 Application au calcul de limites	734
15.2.7 Suites équivalentes	735
15.3 Exercices de synthèse	737
15.4 Solution des exercices	738
16 Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle	747
✓ 16.1 Dérivée d'une fonction réelle	747
✓ 16.1.1 Définitions	747
✓ 16.1.2 Dérivées des fonctions usuelles	752
✓ 16.1.3 Propriétés algébriques de la dérivée	753
16.1.4 Différentielle	758
16.1.5 Dérivées successives	760
✓ 16.2 Le théorème des accroissements finis	766
✓ 16.2.1 Le théorème de Rolle	766
✓ 16.2.2 Le théorème des accroissements finis	769
✓ 16.3 Applications du théorème des accroissements finis	771
✓ 16.3.1 Étude de la monotonie d'une fonction dérivable	771
16.3.2 Application à la recherche d'extremum	773
16.3.3 Étude de la convexité	775
✓ 16.3.4 La règle de L'Hôpital	779
16.3.5 Interpolation de Lagrange	781
16.4 La formule de Taylor-Lagrange	789
16.5 Applications de la formule de Taylor-Lagrange	793
16.5.1 Approximation polynomiale	793
16.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente	794
16.6 Exercices de synthèse	797
16.7 Solution des exercices	799

✓ 17 Développements limités	815
✓ 17.1 Définition et généralités	815
17.2 Le théorème de Taylor-Young	821
✓ 17.3 Opérations sur les développements limités	826
17.3.1 Opérations algébriques	827
17.3.2 Dérivation et primitivation d'un développement limité	832
17.4 Extensions de la notion de développement limité	837
17.4.1 Développements limités à gauche ou à droite	837
17.4.2 Développement limité au voisinage d'un réel non nul	838
17.4.3 Développement limité au voisinage de l'infini	840
17.4.4 Développement limité d'une fonction non bornée	842
17.5 Utilisations des développements limités	844
17.5.1 Utilisation pour la recherche d'équivalents	844
17.5.2 Utilisation pour le calcul de limites	846
17.5.3 Étude des branches infinies	847
17.5.4 Étude des propriétés locales	854
17.6 Quelques notions sur les développements asymptotiques	855
17.6.1 Échelle de comparaison	855
17.6.2 Développement asymptotique	856
17.7 Plan d'étude d'une fonction	857
17.8 Exercices de synthèse	861
17.9 Solution des exercices	862

* **CALCUL INTÉGRAL** **885**

18 L'intégrale de Riemann	887
18.1 Intégrale d'une fonction en escalier	887
18.1.1 Fonction en escalier	887
18.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier	889
18.2 Intégrale de Riemann	891
18.2.1 Définition	892
18.2.2 Principaux exemples de fonctions Riemann-intégrables	897
18.2.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann	899
18.3 Intégrales indéfinies et primitives	902
18.3.1 Intégrales indéfinies	902

18.3.2	Primitives	907
18.3.3	Liste des primitives usuelles	910
18.3.4	Formule de primitivation par parties	913
18.3.5	Formules de changement de variable pour une primitive	914
18.4	Résultats généraux sur l'intégrale de Riemann	919
18.4.1	Intégration par parties	919
18.4.2	Formule du changement de variable pour une intégrale	921
18.4.3	Sommes de Riemann	927
18.4.4	Formules de la moyenne	934
18.4.5	Formule de Taylor à reste intégral	935
18.5	Méthodes de calcul de primitives	937
18.5.1	Intégration d'une fonction rationnelle	937
18.5.2	Intégration d'une fonction rationnelle en sinus et cosinus hyperboliques	942
18.5.3	Intégration d'une fonction rationnelle en sinus et cosinus	943
18.5.4	Intégration d'une fonction rationnelle à radical	944
18.6	Exercices de synthèse	946
18.7	Solution des exercices	948
19	L'intégrale généralisée	965
19.1	Nature d'une intégrale généralisée	965
19.2	Calcul des intégrales généralisées	970
19.2.1	Formule de changement de variable	970
19.2.2	Intégration par parties	973
19.2.3	Exemples de référence	976
19.3	Critères de convergence	978
19.3.1	Remarques préliminaires	978
19.3.2	Critère de Cauchy	979
19.3.3	Critères de convergence pour les fonctions positives	982
19.4	Convergence absolue	988
19.5	Semi-convergence	990
19.6	Exercices de synthèse	994
19.7	Solution des exercices	996

20 Équations différentielles linéaires	1009
20.1 Définitions et terminologie	1009
20.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre	1012
20.2.1 Normalisation d'une équation différentielle	1012
20.2.2 Équations différentielles homogènes	1014
20.2.3 Équations différentielles non homogènes	1017
20.2.4 Étude détaillée d'un exemple	1026
20.2.5 Équations différentielles à coefficients complexes	1031
20.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre	1033
20.3.1 Généralités	1034
20.3.2 Systèmes différentiels homogènes	1036
20.3.3 Systèmes différentiels non homogènes	1044
20.3.4 Équations différentielles d'ordre n à coefficients constants	1051
20.4 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants	1053
20.4.1 Équations différentielles homogènes	1054
20.4.2 Équations différentielles non homogènes	1057
20.5 Exercices de synthèse	1069
20.6 Solution des exercices	1070
 Bibliographie	 1083
 Index	 1085

Algèbre et analyse

Stéphane BALAC

Frédéric STURM

Cet ouvrage, réunissant en un tout cohérent algèbre et analyse, s'adresse de manière plus spécifique aux élèves de première année des cycles préparatoires intégrés des écoles d'ingénieurs mais peut être utilisé avec profit par tout étudiant se destinant à des études supérieures d'ingénieur. Il est issu de l'enseignement dispensé par les auteurs dans la filière ASINSA qui est l'une des trois filières de premier cycle international de l'INSA de Lyon. A ce titre, il ne constitue pas seulement une somme de connaissances mathématiques de 1^{re} année de l'enseignement supérieur mais vise à présenter de manière précise les résultats essentiels à une formation d'ingénieur généraliste.

Cette nouvelle édition revue et augmentée est divisée en 20 chapitres regroupés en 5 grandes parties : ensembles numériques fondamentaux, polynômes et fractions rationnelles, algèbre linéaire, calcul différentiel et calcul intégral. Chaque chapitre contient de courts exercices visant à tester la bonne compréhension des notions introduites et se termine par quelques exercices de synthèse. Une correction détaillée et commentée de tous les exercices est fournie en fin de chapitre. Le logiciel de calcul MAPLE est utilisé dans l'ouvrage pour illustrer certaines notions introduites.

Le lecteur trouvera une suite naturelle à ce cours de mathématiques de première année dans l'ouvrage « Analyse et algèbre, Cours de mathématiques de deuxième année » publié dans la même collection et chez le même éditeur par Stéphane Balac et Laurent Chupin.

Stéphane BALAC est Maître de Conférences en mathématiques à l'École Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie (ENSSAT) de Lannion. Agrégé de Mathématiques, il a enseigné pendant plusieurs années les mathématiques en premier cycle à l'INSA de Lyon dans la filière classique et dans la filière internationale ASINSA. Docteur de l'Université de Rennes 1, ses recherches portent sur la modélisation mathématique et l'étude de méthodes numériques en électromagnétisme dans le cadre d'applications en imagerie médicale et plus récemment en optronique et télécommunications optiques.

Frédéric STURM est Maître de Conférences à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon. Il enseigne les mathématiques et l'analyse numérique en premier cycle dans la filière classique et dans la filière internationale ASINSA. Il est Docteur de l'Université de Toulon et du Var et chercheur au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA). Ses recherches portent sur la résolution mathématique et numérique de problèmes de propagation d'ondes acoustiques et problèmes inverses dans des milieux multicouches, et plus particulièrement sur la caractérisation et la quantification d'effets tridimensionnels en acoustique sous-marine.

ISBN 978-2-88074-828-9



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

9 782880 748289 >