

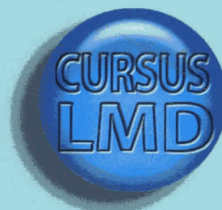
Mathématiques

Algèbre

L3

Sous la direction de
Aviva Szpirglas

François Arnault
Gilles Bailly-Maitre
Yves Benjamin
Philippe du Bois
Lionel Ducos
Aurélien Galateau
Henri Lombardi
Cécile Poirier
Claude Quitté
Maxime Rebout
Matthieu Romagny
Julien Roques



**Cours complet avec 400 tests
et exercices corrigés**

PEARSON
Education

M850

046586
①

Mathématiques **L3** Algèbre

**Cours complet avec 400 tests
et exercices corrigés**



Sous la direction de Aviva Szpirglas

François Arnault, Gilles Bailly-Maitre, Yves Benjamin, Philippe du Bois,
Lionel Ducos, Aurélien Galateau, Henri Lombardi, Cécile Poirier,
Claude Quitté, Maxime Rebout, Matthieu Romagny, Julien Roques

PEARSON
Education

Table des matières

Les auteurs	iii
Avant-propos	xv
Présentation	xvi
Remerciements	xviii
Partie I – Ensembles, cardinalité	1
1 Ensembles	3
I Rappels et quelques compléments	3
I.1 Parties	3
I.2 Relations	4
I.3 Fonctions	5
I.4 Familles et produits	5
I.5 Peut-on tout faire avec des ensembles ?	5
II Ensembles ordonnés	6
II.1 Relations d'ordre	6
II.2 Ordres sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	7
II.3 Bornes et éléments extrémaux	8
II.4 Segments	9
II.5 Homomorphismes d'ensembles ordonnés	10
II.6 Bons ordres	10
II.7 Récurrence transfinie	12
III Exercices	13
2 Axiomes, cardinaux	15
I Théorie axiomatique - Zermelo-Fraenkel	15
I.1 Les axiomes (presque) simples	15
I.2 Les axiomes techniques	16
I.3 Conséquences	17
I.4 Entiers naturels	17
I.5 Classes ou ensembles	18
I.6 Les axiomes facultatifs	18
I.7 Hypothèses équivalentes à l'axiome du choix	19
II Cardinaux	21

II.1	Théorème de comparabilité	21
II.2	Équipotence	23
II.3	Ensembles dénombrables	25
II.4	Ensembles non dénombrables	28
II.5	Arithmétique cardinale	28
III	Exercices	29
Complément	Les ordinaux	31
Partie II – Plus d’algèbre linéaire et de géométrie		37
3	Algèbre bilinéaire	39
I	Applications et formes bilinéaires	42
I.1	Généralités	42
I.2	Dualité	47
I.3	Orthogonalité	54
I.4	Isotropie	60
I.5	Sous-espaces totalement isotropes maximaux	64
I.6	Adjoint d’un endomorphisme	64
II	Formes symétriques et formes quadratiques	67
II.1	Définitions associées aux formes symétriques et premières propriétés	67
II.2	Endomorphismes particuliers	75
II.3	Classification des formes quadratiques	79
III	Formes sesquilinéaires et hermitiennes	84
III.1	Généralités	85
III.2	Formes à symétrie hermitienne et formes quadratiques hermitiennes	86
IV	Exercices	90
Complément 1	Théorème de Witt	92
Complément 2	Formes antisymétriques – Matrices symplectiques	96
4	Géométrie affine	103
I	Compléments de géométrie	104
I.1	Rappels	104
I.2	Compléments sur les barycentres	108
I.3	Compléments sur les applications affines	111
I.4	Topologie d’un espace affine réel de dimension finie	113
I.5	Hyperplans affines et demi-espaces	115
I.6	Compléments de géométrie euclidienne	118

II	Convexité	120
II.1	Ensembles convexes	120
II.2	Enveloppe convexe	122
II.3	Intérieur et adhérence	126
II.4	Hyperplan d'appui et projection	128
II.5	Points extrémaux	131
II.6	Fonctions convexes	133
II.7	Application de la convexité au théorème de Jung	135
II.8	Polyèdres convexes	136
III	Exercices	149
Complément 1	Matrices bistochastiques	151
Complément 2	Théorème de Morley	156
5	Géométrie projective	159
I	Espace vectoriel engendré par un espace affine	159
II	Espaces projectifs	162
II.1	Espaces projectifs et applications projectives	162
II.2	Droite projective et birapport	168
II.3	Dualité	171
II.4	Quadrilatère complet, théorèmes de Pappus et de Desargues	174
II.5	Complexification	177
II.6	Structure euclidienne	179
III	Coniques projectives	181
III.1	Coniques projectives complexes	182
III.2	Coniques projectives sur un corps quelconque	184
III.3	Tangentes aux coniques propres	187
III.4	Pôles et polaires	189
III.5	Classification des coniques affines réelles propres	195
IV	Exercices	198
Complément 1	Géométrie plane elliptique	201
Complément 2	Géométrie plane hyperbolique	203
Complément 3	Droite projective complexe – Groupe circulaire – Inversion	211
Partie III – Groupes		215
6	Théorie des groupes	217
I	Généralités sur les groupes	218

I.1	Définition d'un groupe	218
I.2	Sous-groupes	220
I.3	Morphismes de groupes	222
I.4	Isomorphismes de groupes, automorphismes	224
I.5	Sous-groupe engendré par une partie	225
II	Sous-groupes distingués et groupes quotients	226
II.1	Classes à gauche, classes à droite	227
II.2	Sous-groupes distingués et groupe quotient	228
II.3	Centre et groupe dérivé	230
II.4	Sous-groupes du quotient et théorèmes d'isomorphisme	231
III	Génération de groupes	233
III.1	Groupes monogènes, groupes cycliques	233
III.2	Groupes libres	234
III.3	Présentation d'un groupe	236
IV	Action d'un groupe sur un ensemble	237
IV.1	Définitions	237
IV.2	Exemples : groupe symétrique et action d'un groupe sur lui-même	239
IV.3	Équation aux classes et formule de Burnside	240
V	Produits de groupes	243
V.1	Produits directs	243
V.2	Produits semi-directs	245
V.3	Critère de dévissage	246
VI	Groupes abéliens de type fini	249
VI.1	Structure des groupes abéliens de type fini	249
VI.2	Automorphismes des groupes cycliques	256
VI.3	Sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n	259
VII	Le groupe symétrique	263
VII.1	Propriétés élémentaires du groupe symétrique	264
VII.2	Le groupe alterné	266
VII.3	Automorphismes de \mathfrak{S}_n	270
VIII	Sous-groupes de Sylow	272
VIII.1	Sous-groupes de Sylow	272
VIII.2	Les théorèmes de Sylow	273
VIII.3	Quelques applications et compléments	275
IX	Exercices	279
Complément 1	Algorithme de Todd-Coxeter	281
Complément 2	Géométrie diophantienne	286

7	Groupes et algèbre linéaire	293
I	Le groupe linéaire	294
I.1	Définitions et caractérisation	294
I.2	Le groupe spécial linéaire	296
I.3	Générateurs	297
I.4	Centre et commutateurs	301
I.5	Propriétés de groupes	308
I.6	Topologie du groupe linéaire	310
II	Groupe orthogonal	314
II.1	Groupe orthogonal général	314
II.2	L'espace euclidien canonique	323
III	Groupe unitaire	337
III.1	Cas général	337
III.2	Le groupe unitaire canonique	340
IV	Décompositions du groupe linéaire	341
IV.1	Décomposition de Dunford	341
IV.2	Décomposition polaire	342
IV.3	Décomposition d'Iwasawa	347
V	Exercices	348
Complément 1	À propos de l'exponentielle	349
Complément 2	Empilement optimal de disques dans le plan	366
Complément 3	Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré	372
Complément 4	Le groupe symplectique	380
8	Groupes et géométrie	385
I	Le groupe affine	385
I.1	Généralités, rappels	386
I.2	Le groupe des homothéties-translations	387
II	Le groupe des isométries	389
II.1	Généralités	389
II.2	Les isométries planes	395
II.3	Les isométries de l'espace	398
II.4	Image d'une partie par une isométrie	404
II.5	Isométries conservant une partie	406
II.6	Sous-groupes finis de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$	408
III	Les polytopes réguliers de l'espace et leurs groupes de rotation	414
III.1	Généralités sur les polytopes réguliers	414
III.2	Classification des polytopes réguliers à similitude près	418

III.3	Le tétraèdre régulier et son groupe d'isométries	421
III.4	Le cube et son groupe d'isométries	422
III.5	L'octaèdre régulier et son groupe de rotations	425
III.6	L'icosaèdre régulier et son groupe de rotations	426
III.7	Le dodécaèdre régulier et son groupe de rotations	432
III.8	Les sous-groupes finis de SO_3	434
IV	Exercices	437
Complément 1	Dual d'un convexe, d'un polyèdre	439
Complément 2	Groupes de frise	446

Partie IV – Anneaux et modules 455

9	Anneaux	457
I	Rappels	458
I.1	Notations, exemples fondamentaux	458
I.2	Idéaux	460
I.3	Morphismes d'anneaux	460
I.4	Anneaux quotients	461
I.5	Arithmétique	462
II	Ces êtres étranges qui vivent dans les anneaux	462
II.1	Éléments centraux	463
II.2	Diviseurs de zéro	464
II.3	Éléments réguliers	465
II.4	Éléments nilpotents	467
II.5	Caractéristique d'un anneau	467
II.6	Éléments irréductibles	468
III	Étude des idéaux	470
III.1	Opérations entre idéaux	471
III.2	Générateurs d'un idéal	472
III.3	Idéaux des anneaux euclidiens	474
III.4	Arithmétique des idéaux	477
III.5	Radical d'un idéal	484
III.6	Idéaux maximaux	486
III.7	Idéaux premiers	487
III.8	Idéaux de A/\mathcal{I}	489
IV	Corps des fractions	491
IV.1	Construction	492

IV.2	Propriétés	493
V	Localisation	494
VI	Anneaux noethériens	498
VI.1	Définitions équivalentes	498
VI.2	Fabrication d'anneaux noethériens	499
VI.3	Anneaux artiniens	501
VII	Arithmétique	502
VII.1	Irréductibles ou premiers ?	503
VII.2	Pgcd-ppcm	504
VII.3	Éléments premiers entre eux	505
VII.4	Anneaux à pgcd	506
VII.5	Anneaux de Bézout	510
VII.6	Anneaux factoriels	511
VII.7	Anneaux de Bézout factoriels ?	516
VIII	Quelques conséquences amusantes	517
VIII.1	L'équation $x^2 + y^2 = z^2$	517
VIII.2	L'équation $x^4 + y^4 = z^4$	518
VIII.3	Les sommes de deux carrés	519
VIII.4	L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$	520
IX	Exercices	521
Complément	Les nombres presque premiers	523

10 Polynômes 533

I	Polynômes à une indéterminée	534
I.1	Polynômes à coefficients dans un anneau	534
I.2	Polynômes à coefficients dans un corps	535
I.3	Polynômes à coefficients dans un anneau factoriel	547
I.4	Critères d'irréductibilité des polynômes	549
II	Polynômes à plusieurs indéterminées	554
II.1	Algèbre $A[X_1, \dots, X_n]$	554
II.2	Formules d'Euler et de Taylor	557
III	Polynômes symétriques	558
III.1	Relations entre coefficients et racines	559
III.2	Théorème de structure	559
III.3	Sommes de Newton	561
IV	Élimination	563
IV.1	Résultant de deux polynômes	564
IV.2	Applications algébriques du résultant	567

V	Fractions rationnelles	576
V.1	Corps $K(X)$ des fractions rationnelles	576
V.2	Décomposition en éléments simples	578
V.3	Applications de la décomposition en éléments simples	583
V.4	Déterminants de Hankel	585
VI	Exercices	586
Complément 1	Application géométrique du résultant	588
Complément 2	Sous-variétés algébriques de \mathbb{C}^n et idéaux de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$	596
Complément 3	Polynômes cyclotomiques	599
Complément 4	Polynômes invariants sous le groupe alterné	602
Complément 5	Groupe des K -automorphismes de $K(X)$	607
11	Modules	609
I	Quelques bases pour fixer les idées	609
I.1	Définition	610
I.2	Petit tour d'horizon	611
I.3	Morphismes	612
II	Sous-modules	613
III	Modules quotients	614
IV	Modules de type fini	616
V	Modules noethériens	619
VI	Opérations sur les sous-modules	620
VII	Torsion	624
VIII	Modules libres	625
VIII.1	Familles libres	625
VIII.2	Bases	626
IX	Modules libres et de type fini	629
IX.1	Déterminant	629
IX.2	Structure des modules libres de type fini	633
IX.3	Endomorphismes de A^n	635
X	Modules sur un anneau principal	637
X.1	Généralités et première décomposition	637
X.2	Décomposition des modules de torsion	640
X.3	Théorème de la base adaptée	647
XI	Applications	652
XI.1	Structure des groupes commutatifs de type fini	652
XI.2	Invariants de similitude	653

XII Exercices	657
Complément 1 Idéaux inversibles – Anneaux de Dedekind	659
Complément 2 Principe local-global	679
Complément 3 Vision des mathématiques constructives sur les modules	695
Partie V – Éléments de théorie des corps	709
12 Corps	711
I Extensions de corps	713
I.1 Nombres algébriques – Nombres transcendants	714
I.2 Extensions algébriques	716
I.3 Extensions transcendentes	717
I.4 Corps de rupture	718
II Utilisation de l'algèbre linéaire	719
II.1 Degré d'une extension	719
II.2 Constructions à la règle et au compas	722
II.3 Corps de décomposition – Extensions normales – Extensions séparables	727
III Utilisation de la théorie des groupes	732
III.1 Automorphismes de corps – Groupe de Galois	733
III.2 Résolution par radicaux	738
IV Clôture algébrique de \mathbb{Q}	745
V Exercices	746
Complément Correspondance de Galois	748
13 Corps finis	759
I Clôture algébrique de \mathbb{F}_p	759
II Existence et unicité du corps à p^n éléments	760
II.1 Unicité à isomorphisme près du corps à p^n éléments	760
II.2 Existence du corps à p^n éléments	761
II.3 Groupe multiplicatif du corps à p^n éléments	761
III Sous-corps de \mathbb{F}_{p^n}	763
III.1 Sous-corps et extensions	763
III.2 Automorphismes des corps finis	763
III.3 Nouvelle construction de la clôture algébrique de \mathbb{F}_p	764
IV Polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_p[X]$	764
IV.1 Existence d'un polynôme irréductible de degré n dans $\mathbb{F}_p[X]$	765
IV.2 Corps finis <i>via</i> la caractéristique nulle	766
IV.3 Dénombrement des polynômes irréductibles	766

IV.4 Exemples de corps finis	767
V Polygones réguliers constructibles à la règle et au compas	768
VI Théorème de Wedderburn	773
VII Exercices	775
Complément Quaternions	777
Partie VI – Solutions des tests	783
Partie VII – Solutions des exercices	795
Bibliographie	823
Index général	825
Index des notations	833

Mathématiques **L3** Algèbre

Cours complet avec 400 tests et exercices corrigés

Mathématiques L3 – Algèbre est, avec les deux autres volumes de la collection (*Analyse et Mathématiques appliquées*), le dernier volet d'une série couvrant les besoins des étudiants préparant la licence, le Capes ainsi que l'agrégation de mathématiques, ou se destinant à un master. Il regroupe tout ce qui est nécessaire en L3 : un cours complet et détaillé et 400 tests et exercices entièrement corrigés.

Particulièrement didactique, *Mathématiques L3* s'applique à faire ressortir les raisons d'être et le sens de toutes les notions introduites. La présentation des outils fondamentaux est ainsi toujours assortie d'un grand nombre d'exemples concrets et les concepts analytiques sont reliés aux questions qui les ont fait naître. Quelques éléments d'histoire des mathématiques sont présentés pour illustrer l'ensemble des idées.

Tous les outils sont réunis pour faciliter la compréhension des concepts :

- de nombreux exemples illustrent le cours ;
- grâce à ses encadrés « Rappel », « Attention », « Méthode » et « Synthèse », *Mathématiques L3* rappelle les notions fondamentales, souligne les pièges à éviter, récapitule la marche à suivre pour résoudre les problèmes et synthétise les sujets complexes ;
- posées au fil du texte, des questions tests incitent à une lecture active et indiquent au lecteur s'il peut poursuivre son étude ou s'il doit préalablement consolider ses connaissances ;
- enfin, *Mathématiques L3* propose un entraînement sérieux en offrant un grand nombre d'exercices d'application tous intégralement corrigés.

Public : étudiants en mathématiques, informatique et physique, candidats au Capes et à l'agrégation de mathématiques

Cours : algèbre

Niveau : L3, préparation au Capes et à l'agrégation

PEARSON Pearson Education France
47 bis, rue des Vinaigriers
75010 Paris
Tél. : 01 72 74 90 00
Fax : 01 42 05 22 17
www.pearson.fr

Aviva Szpirglas est professeure à l'université de Poitiers (IUFM) où elle enseigne les mathématiques aux niveaux L et M. Elle est responsable de la préparation au Capes de mathématiques et de l'agrégation interne de mathématiques, et membre du Laboratoire Mathématiques et Applications de l'université de Poitiers (UMR 6086) ; sa recherche concerne l'étude des singularités et l'algèbre effective. Elle a publié *Exercices d'algèbre* (Éditions Cassini, 2007).

François Arnault est maître de conférences à l'université de Limoges.

Yves Benjamin est professeur de classe préparatoire au lycée Michelet à Vanves.

Gilles Bailly-Maitre est maître de conférences à l'IUFM de Poitou-Charentes, et enseigne à l'université de la Rochelle.

Philippe du Bois est professeur des universités à l'université d'Angers.

Lionel Ducos est maître de conférences à l'université de Poitiers.

Aurélien Galateau est post-doctorant et enseigne à l'université de Bâle.

Henri Lombardi est maître de conférences à l'université de Besançon.

Cécile Poirier est ATER à l'université de Toulouse.

Claude Quitté est maître de conférences à l'université de Poitiers.

Maxime Rebout est ATER à l'université de Toulouse.

Mathieu Romagny est maître de conférences à l'université Paris VI.

Julien Roques est maître de conférences à l'université de Grenoble (Institut Fourier).

7351 0511 49,90€



9 782744 073519