

**H. HENICHE**

**L'ALGEBRE DES STRUCTURES**

**TOME I**



**OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES**

**H. HENICHE**

*Inspecteur de l'éducation et de la formation  
Chargé de cours à l'ENTP (Kouba)*



idc197

M831TA

# L'ALGEBRE DES STRUCTURES

~~M84~~

TOME I



IDC 197 1/1



**OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES**

1, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger)

# TABLE DES MATIÈRES

## RAPPELS

<i>I Notions de logique</i> .....	3
Les propositions .....	4
Négation d'une proposition - conjonction et disjonction de deux propositions l'implication .....	5
L'équivalence logique - contraposée d'une implication ...	5
Axiomes de non-contradiction et du tiers-exclu .....	5
Le raisonnement par l'absurde .....	5
<i>II La théorie des ensembles</i> .....	6
Notion d'ensemble .....	6
Inclusion - Réunion - Intersection .....	7
Parties d'un ensemble .....	7
Propriétés définies sur un ensemble - Quantificateurs ...	10
Partition d'un ensemble .....	13
<i>III Produit cartésien - Relations - Correspondances</i> .....	14
Produit cartésien - Propriétés du produit cartésien .....	14
Relation et graphe d'une relation .....	15
Application de A vers B .....	16
Égalité - Restriction - Prolongement .....	17
Injection - Surjection - Bijection .....	17
Composition des applications .....	18
Réciproque d'une application .....	18
Images et Images réciproques de s/ensembles .....	19
Notation indicielle - Famille d'éléments - Famille des parties	22
<i>IV Relations d'équivalence</i> .....	23
Réflexivité - symétrie - antisymétrie - transitivité .....	23
Classes d'équivalence - Ensemble quotient .....	24
Décomposition canonique d'une application .....	26

V Relation d'ordre .....	27
Ordre total - Ordre partiel - Ensemble totalement ordonné	28
Majorants - Minorants d'une partie d'un ensemble .....	29
Borne supérieure - Borne inférieure .....	30
Éléments maximaux et éléments minimaux d'un ensemble	31
Ordre sur le produit cartésien de deux ensembles ordonnés	32
L'ordre lexicographique .....	33

**ANNEXE : Introduction à l'étude des cardinaux et des entiers naturels .....** 35

1 - Introduction .....	35
2 - Equipotence des ensembles - Cardinal d'un ensemble	35
3 - Opérations sur les cardinaux .....	37
Addition des cardinaux .....	38
Produit des cardinaux .....	40
4 - Ordre sur les cardinaux .....	42
5 - Compatibilité de l'ordre et des opérations sur les cardinaux	45
6 - Cardinaux finis et cardinaux infinis .....	47
7 - L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels .....	48
Propriété fondamentale et principe de récurrence ...	50
8 - Ordre naturel et opérations définis sur $\mathbb{N}$ .....	52
9 - Parties majorées de $\mathbb{N}$ .....	54

**CHAPITRE I**

**A - Les lois de composition interne .....** 57

(1) Définition .....	57
(2) Propriétés .....	58
(3) Distributivité d'une loi par rapport à une autre .....	59
(4) Compatibilité .....	60
(5) Lois de composition interne dans un ensemble-quotient	61

**B - Groupes .....** 62

(1) Structure de groupe et $s$ /groupe .....	62
(2) $s$ /groupe engendré par une partie .....	64
Étude de quelques cas particuliers groupe monogène	67

(3) Homomorphismes de groupes .....	67
(4) Noyau d'un homomorphisme .....	68
(5) Automorphisme intérieur et s/groupes distingués ....	70
(6) Groupes - quotient .....	72
Exemples de groupes-quotient classes d'équivalence modulo un s/groupe (théorème de Lagrange) .....	73
groupe - quotient modulo un s/groupe .....	74
Exercices : Décomposition canonique d'un homomorphisme	80
Produit cartésien de groupes .....	80
(7) - Groupe symétrique .....	81
Etude des permutations d'un ensemble fini .....	82
Décomposition d'une permutation .....	83
Inversions d'une permutation .....	84
Signature d'une permutation .....	85
Parité d'une transposition .....	88
<b>C - Anneaux et Corps</b> .....	91
(1) Structure d'anneau et s/anneau .....	91
Définition -	91
Diviseurs de zéro - Intégrité .....	91
Éléments simplifiables d'un anneau .....	91
Éléments inversibles d'un anneau .....	93
Sous-anneau d'un anneau .....	93
(2) Idéaux d'un anneau .....	94
Définition et Exemples .....	94
Propriétés .....	95
Idéal Bilatère - Idéal principal - Anneau principal ..	96
Homomorphismes d'anneaux - Anneau-quotient ...	98
(3) Caractéristique d'un anneau .....	102
Indice d'un élément .....	102
Définition de la caractéristique .....	102
Cas particuliers .....	103
(4) Corps et sous-corps .....	104
Définitions	
Caractéristique d'un corps .....	105
(5) Anneaux ordonnés - corps des fractions .....	107
Groupes commutatifs ordonnés .....	107
Cône positif d'un groupe ordonné .....	108
Anneau ordonné .....	111
Caractéristique d'un anneau ordonné .....	112
Corps des fractions d'un anneau commutatif .....	113
Prolongement de l'ordre d'un anneau ordonné à son corps des fractions .....	117

(6) Aperçu sur le corps des nombres réels .....	119
Quelques propriétés du corps $\mathbb{R}$ .....	121
Les suites de nombres réels .....	123
L'algèbre des suites numériques .....	126
Suite de Cauchy - Critère de Cauchy .....	127
<b>D - Les nombres complexes .....</b>	<b>132</b>
(1) Corps des nombres complexes .....	132
Introduction .....	132
Construction de $\mathbb{C}$ .....	133
Ecriture cartésienne d'un nombre complexe .....	135
Racine carrée d'un nombre complexe .....	136
Nombres complexes conjugués .....	138
Module d'un nombre complexe .....	39
Représentation géométrique d'un nombre complexe ..	140
(2) Nombres complexes et le plan euclidien orienté .....	141
Norme et distance euclidiennes .....	141
Formule de Moivre .....	144
(3) Etude de quelques applications des nombres complexes	147
La fonction homographique .....	147
Birapport de quatre nombres complexes .....	155
Exercices .....	162



Achévé d'imprimer sur les presses de

**L'OFFICE DES PUBLICATIONS  
UNIVERSITAIRES**

1, Place Centrale - Ben-Aknoun - ALGER