

J. BASS

M 838 / T3

COURS DE

045959
①

MATHÉMATIQUES

TOME III

TOPOLOGIE . INTÉGRATION . DISTRIBUTIONS.
ÉQUATIONS INTÉGRALES . ANALYSE HARMONIQUE



SERVICE DE PRESSE

MASSON ET C^{IE}, ÉDITEURS

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VI^o

1971

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	5
---------------------------	---

PREMIÈRE PARTIE

TOPOLOGIE. ESPACES MÉTRIQUES. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

<i>Rappel de notations et de définitions</i>	12
--	----

CHAPITRE I — <i>Topologie générale</i>	13
--	----

I-1-1. Introduction	13
I-1-2. Espaces topologiques · Voisinages	13
I-1-3. Exemple de la droite	15
I-1-4. Points d'accumulation · Adhérence	16
I-1-5. Sous-espaces	18
I-1-6. Continuité	19
I-1-7. Homéomorphie	21
I-1-8. Limite	22
I-1-9. Espaces compacts	25

CHAPITRE II — <i>Espaces métriques</i>	31
--	----

I-2-1. Définition · Distance	31
I-2-2. Cas particulier des espaces vectoriels · Espaces vectoriels normés	32
I-2-3. Exemples	32
I-2-4. Topologie dans un espace métrique	33
I-2-5. Convergence dans un espace métrique	35
I-2-6. Espaces complets	37
I-2-7. Espaces métriques compacts	39
I-2-8. Continuité uniforme	40

CHAPITRE III. — <i>Généralités sur les espaces fonctionnels</i>	42
---	----

I-3-1. Convergence uniforme	42
I-3-2. Applications bornées d'un ensemble dans un espace vectoriel	44
I-3-3. Applications linéaires d'un espace vectoriel normé dans un autre	45
I-3-4. Exemples d'applications linéaires	49
I-3-5. Equivalence des normes	50
I-3-6. Espace dual	53
I-3-7. Exemples de dualité	54

CHAPITRE IV. — <i>Exemples d'espaces de Banach · Espace de Hilbert</i>	59
--	----

I-4-1. Espace de Hilbert	59
I-4-2. Espaces de Hilbert séparables · Bases	62
I-4-3. Dual de l'espace de Hilbert	64

I-4- 4. Convergence faible dans un espace de Banach	67
I-4- 5. Convergence faible dans l'espace de Hilbert	69
I-4- 6. Etude de la boule unité dans l'espace de Hilbert	70
I-4- 7. Inégalités de Hölder et de Minkowski	71
I-4- 8. Espace L^p	74
I-4- 9. Premières notions sur les espaces L^p	76
I-4-10. Notions sur les espaces de Marcinkiewicz	77
I-4-11. Notions sur les ensembles convexes	78
I-4-12. Fonctions convexes	81
Exercices sur la première partie	83
DEUXIÈME PARTIE	
INTÉGRATION	
CHAPITRE I. — Tribus · Fonctions mesurables · Mesures	91
II-1- 1. Introduction	91
II-1- 2. Rappel de quelques notions utiles	93
II-1- 3. Algèbres et σ -algèbres	95
II-1- 4. σ -Algèbres et classes monotones	96
II-1- 5. Fonctions mesurables	97
II-1- 6. Propriétés des fonctions mesurables	99
II-1- 7. Fonctions étagées et fonctions mesurables	100
II-1- 8. Fonctions additives d'ensemble · Mesures	102
II-1- 9. Prolongement de mesures	104
II-1-10. Mesures sur \mathbb{R} · Fonctions de répartition	105
CHAPITRE II. — Intégrale de Lebesgue	109
II-2- 1. Définitions	109
II-2- 2. Propriétés des intégrales de fonctions étagées	110
II-2- 3. Propriétés de l'intégrale	113
II-2- 4. Théorèmes de convergence	115
II-2- 5. Exemples d'application des théorèmes de convergence	120
II-2- 6. Mesures absolument continues · Mesures singulières	121
II-2- 7. Exemples de fonctions singulières	124
II-2- 8. Notion de densité	126
II-2- 9. Intégrale de Riemann	127
II-2-10. Intégrale de Stieltjes	131
II-2-11. Intégrales impropres · Intégrales dépendant d'un paramètre	133
II-2-12. Produit de mesures	134
II-2-13. Théorème de Fubini	136
II-2-14. Mesure, Intégration et Probabilités	140
CHAPITRE III. — Espace L^1 · Espace L^2	142
II-3- 1. Espace L^1	142
II-3- 2. Espace L^2	144
II-3- 3. Théorème de Riesz-Fischer	145
II-3- 4. Etude du système des fonctions trigonométriques	146
II-3- 5. Théorème de Plancherel	150
II-3- 6. Théorème de Riemann-Lebesgue. Remarques sur l'approximation des fonctions	154
II-3- 7. Variables aléatoires de second ordre	156
Exercices sur la deuxième partie	158

TROISIÈME PARTIE

DISTRIBUTIONS

CHAPITRE I. — Généralités	167
III-1- 1. Espace dual · Mesure de Radon	167

J. BASS



COURS DE
MATHÉMATIQUES



TOME III





III-1-2. Distributions 170
 III-1-3. Distribution de Dirac et distributions analogues dans l'espace 171

CHAPITRE II. — Opérations sur les distributions 173

III-2-1. Opérations algébriques 173
 III-2-2. Limites de distributions 175
 III-2-3. Application à la distribution de Dirac 175
 III-2-4. Distributions à support borné 178
 III-2-5. Dérivée d'une distribution 179
 III-2-6. Dérivées de distributions à trois dimensions 182
 III-2-7. Doublets 185
 III-2-8. Dérivée de la fonction $\frac{1}{r}$ · Laplacien de $\frac{1}{r}$ 186
 III-2-9. Dérivation des suites et des séries 187

CHAPITRE III. — Convolution 189

III-3-1. Introduction · Convolution de deux fonctions 189
 III-3-2. Convolution de deux distributions 190
 III-3-3. Convolution d'une distribution par une fonction 193
 III-3-4. Algèbre de convolution · Convolution par la distribution de Dirac 194
 III-3-5. Convolution de plusieurs distributions 195

CHAPITRE IV. — Séries de Fourier 197

III-4-1. Intégrale de Dirichlet 197
 III-4-2. Séries trigonométriques 199
 III-4-3. Distributions périodiques 201
 III-4-4. Application à la théorie des séries de Fourier 203
 III-4-5. Remarques sur la dérivation d'une série de Fourier de fonctions 204

CHAPITRE V. — Transformation de Fourier 207

III-5-1. Intégrale de Fourier d'une fonction 207
 III-5-2. Exemples 210
 III-5-3. Transformée de Fourier d'une distribution à support borné 212
 III-5-4. Formules de réciprocity de Fourier 212
 III-5-5. Convolution et intégrale de Fourier 214

CHAPITRE VI. — Équations de convolution 216

III-6-1. Algèbres de convolution 216
 III-6-2. Application aux équations différentielles linéaires 217
 III-6-3. Conditions initiales et second membre 219
 III-6-4. Application aux équations aux dérivées partielles · Cas de l'équation de Laplace 220
 III-6-5. Équation de la chaleur 221
 III-6-6. Équation des cordes vibrantes 225

Exercices sur la troisième partie 229

QUATRIÈME PARTIE

OPÉRATEURS COMPACTS. ÉQUATIONS INTÉGRALES

CHAPITRE I. — Opérateurs compacts 237

IV-1-1. Introduction. Opérateurs compacts 237
 IV-1-2. Propriétés des opérateurs compacts 239
 IV-1-3. Opérateurs de rang fini 241
 IV-1-4. Opérateur adjoint 242
 IV-1-5. Cas d'un espace de dimension finie 244

CHAPITRE II. — Algèbres d'opérateurs compacts 245

IV-2-1. Introduction 245
 IV-2-2. Algèbre des opérateurs continus de H dans H 245



res 247
 250
 250
 compact 252
 espace de Hilbert 254
 255
 258
 s 258
 261
 264
 266
 268
 r A 269
 272
 272
 274
 278
 280
 solvant 283
 286
 c limites 288
 288
 289
 e en équation intégrale 292
 298
 ntes 300
 301
 305
 308
 312
 313
 317
 319
 E
 ALYSE HARMONIQUE
 326
 327
 ion 327
 329
 Fourier 330
 ctions caractéristiques 332
 333
 338
 343
 nslation, longueur d'inclusion .. 343
 344
 riodiques 346
 348
 352
 rrier généralisées 352
 e 353

V-2- 8. Coefficients de Fourier-Bohr. Moyenne
 tion
 V-2- 9. Propriétés de la fonction de corrélation
 V-2-10. Formule de Parseval. Théorème d'unicité
 V-2-11. Fonction de corrélation mutuelle de deu
 V-2-12. Représentation des fonctions presque-périodiques
 V-2-13. Valeurs propres et spectre
 V-2-14. Résumé des propriétés des fonctions presque-périodiques

CHAPITRE III. *Fonctions pseudo-aléatoires*

V-3- 1. Introduction
 V-3- 2. Théorème fondamental
 V-3- 3. Transformation des fonctions pseudo-aléatoires
 V-3- 4. Fonction de corrélation des fonctions pseudo-aléatoires
 V-3- 5. Construction de fonctions pseudo-aléatoires
 V-3- 6. Relations entre les fonctions pseudo-aléatoires modulo 1. Théorèmes de H. Weyl
 V-3- 7. Suites équiréparties modulo 1 et fonctions pseudo-aléatoires
 V-3- 8. Compléments
 V-3- 9. Conclusion

Exercices sur la cinquième partie

Bibliographie

Index des mathématiciens cités

Index alphabétique des matières

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEUR
 120 B^d S^t-Germain, PARIS
 Dépôt légal. 1^{er} trimestre 1953