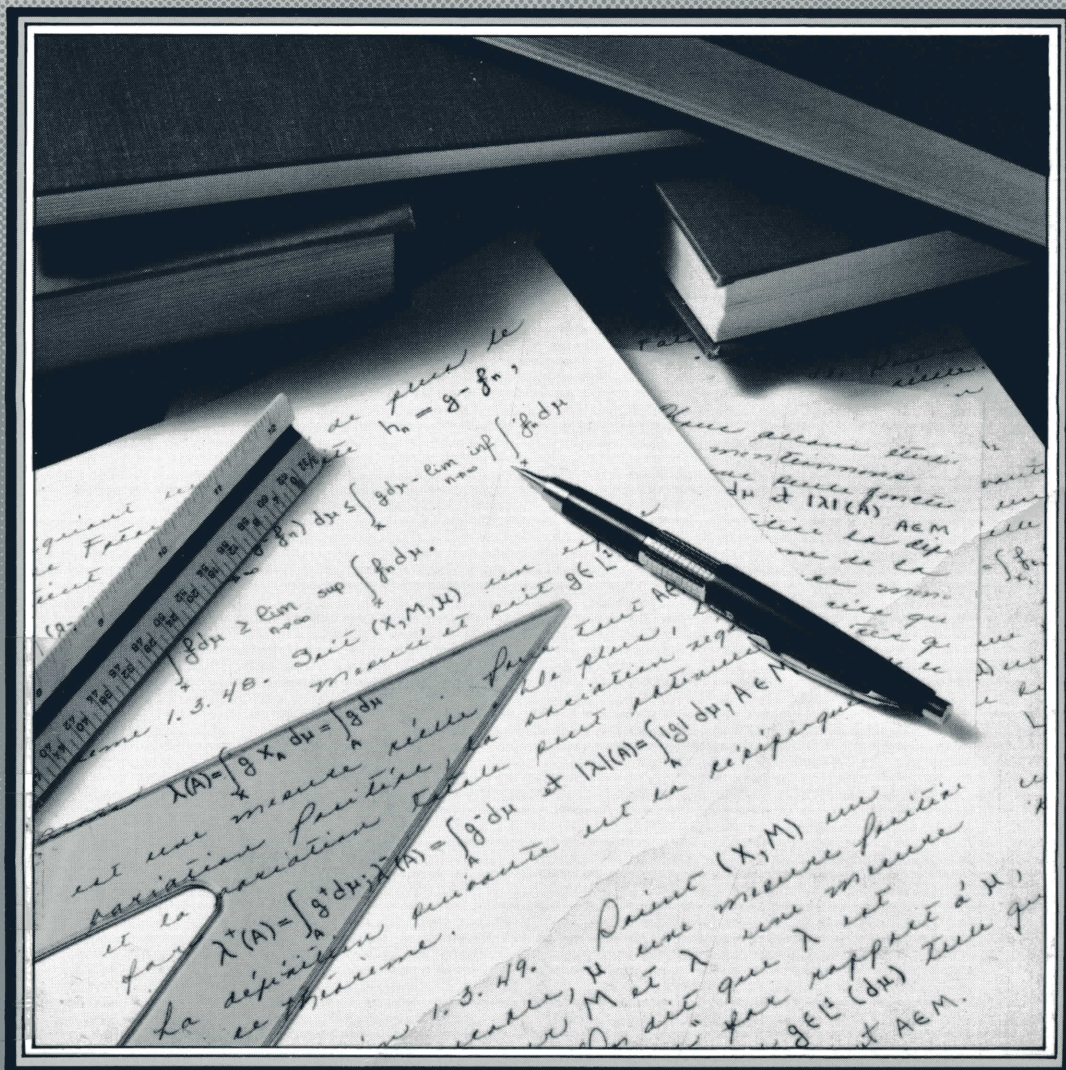


# Introduction à L'ANALYSE FONCTIONNELLE



## TABLE DES MATIÈRES

### CHAPITRE 1 - PRÉLIMINAIRES

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Ensembles ordonnés. Axiome des chaînes maximales ..... | 2  |
| 1.2 | Eléments de topologie .....                            | 6  |
| 1.3 | Mesure et intégration .....                            | 13 |

### CHAPITRE 2 - ESPACES LINÉAIRES

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Espaces et sous-espaces linéaires .....                           | 42 |
| 2.2 | Ensembles linéairement indépendants. Sous-espaces engendrés ..... | 47 |
| 2.3 | Base algébrique. Dimension algébrique.....                        | 49 |
| 2.4 | Isomorphisme des espaces linéaires .....                          | 53 |
| 2.5 | Décomposition en somme directe d'un espace linéaire .....         | 56 |
| 2.6 | Espaces linéaires quotient. Codimension algébrique .....          | 57 |
| 2.7 | Espaces linéaires topologiques .....                              | 62 |
|     | EXERCICES .....   | 67 |
|     | PROJETS .....   | 73 |

### CHAPITRE 3 - ESPACES MÉTRIQUES

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.1  | Espace métrique. Définitions. Propriétés générales .....                 | 78  |
| 3.2  | Espace normé. Définitions. Propriétés générales .....                    | 88  |
| 3.3  | Convergence. Espaces métriques complets .....                            | 96  |
| 3.4  | Une propriété de point fixe dans les espaces métriques<br>complets ..... | 111 |
| 3.5  | Complétion des espaces métriques .....                                   | 117 |
| 3.6  | Espaces métriques de première et de deuxième catégorie de<br>Baire ..... | 121 |
| 3.7  | Espaces métriques séparables .....                                       | 126 |
| 3.8  | Espaces métriques compacts .....   | 135 |
| 3.9  | Espaces normés équivalents .....   | 154 |
| 3.10 | Complétion des espaces normés .....                                      | 159 |
| 3.11 | Espaces normés de dimension algébrique finie .....                       | 161 |
| 3.12 | L'espace produit ou somme directe de deux espaces normés ...             | 167 |
|      | EXERCICES .....  | 171 |
|      | PROJETS .....  | 178 |

HILBERT

|  |     |
|--|-----|
| Propriétés générales .....                       | 186 |
| Décompositions orthogonales d'un espace .....    | 195 |
| Opérateurs d'un espace de Hilbert .....          | 204 |
| Espaces de Hilbert. Dimension hilbertienne ..... | 222 |
| Opérateurs .....                                 | 225 |
| Polynômes orthonormaux .....                     | 239 |
| .....  | 248 |
| .....  | 253 |

LINÉAIRES

|   |     |
|---|-----|
| Opérateurs sur un espace linéaire .....       | 268 |
| Fonctions continues sur un espace normé ..... | 274 |
| Opérateurs sur un espace de Hilbert .....     | 279 |
| Opérateurs de Nach .....                      | 282 |
| Opérateurs d'un espace normé .....            | 291 |
| Opérateurs de Riesz .....                     | 310 |
| Opérateurs de Riesz .....                     | 313 |
| .....   | 326 |
| .....   | 331 |

OPÉRATEURS

|   |     |
|---|-----|
| Opérateurs sur un espace linéaire .....       | 336 |
| Opérateurs continus sur un espace normé ..... | 341 |
| Opérateurs .....                              | 343 |
| Opérateurs .....                              | 345 |
| Opérateurs .....                              | 352 |
| Opérateurs .....                              | 353 |
| Opérateurs .....                              | 358 |
| Opérateurs linéaires continus .....           | 363 |
| Opérateurs .....                              | 371 |
| Opérateurs .....                              | 375 |
| Opérateurs .....                              | 377 |
| Opérateurs .....                              | 383 |
| Opérateurs .....                              | 388 |

CHAPITRE 7 - OPERATEURS

|     |   |
|-----|---|
| 7.1 | Formes bilinéaires                              |
| 7.2 | Opérateur adjoint                               |
| 7.3 | Opérateurs auto-adjoints                        |
| 7.4 | Opérateurs auto-adjoints                        |
| 7.5 | Projecteurs                                     |
| 7.6 | Opérateurs normaux                              |
| 7.7 | Opérateurs unitaires                            |
| 7.8 | Représentation d'un espace de Hilbert séparable |

EXERCICES .....

PROJETS .....

CHAPITRE 8 - THÉORIE SPECTRALE

|     |   |
|-----|---|
| 8.1 | Valeurs propres d'un opérateur                                  |
| 8.2 | Le spectre d'un opérateur                                       |
| 8.3 | Le spectre d'un opérateur sur $\mathbb{C}$ de dimension infinie |
| 8.4 | Le spectre d'un opérateur sur $\mathbb{C}$                      |
| 8.5 | Le spectre d'un opérateur de Hilbert sur $\mathbb{C}$           |

EXERCICES .....

PROJETS .....

CHAPITRE 9 - FONCTIONS DES OPÉRATEURS

DÉCOMPOSITION SPECTRALE

|     |   |
|-----|---|
| 9.1 | La décomposition spectrale d'un opérateur adjoint   |
| 9.2 | Polynômes et fonctions holomorphes                  |
| 9.3 | Fonctions continues d'un opérateur                  |
| 9.4 | Fonctions semi-continues et auto-adjoints           |
| 9.5 | Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint |
| 9.6 | Fonctions continues et semi-continues               |
| 9.7 | Décomposition spectrale d'un opérateur              |

EXERCICES .....

INDEX ALPHABÉTIQUE .....

LISTE DE NOTATIONS PRINCIPALES .....

## CHAPITRE 7 - OPERATEURS LINÉAIRES SUR UN ESPACE DE HILBERT

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 7.1 | Formes bilinéaires et formes quadratiques .....   | 400 |
| 7.2 | Opérateur adjoint .....   | 406 |
| 7.3 | Opérateurs auto-adjoints.....   | 408 |
| 7.4 | Opérateurs auto-adjoints positifs .....   | 413 |
| 7.5 | Projecteurs .....   | 419 |
| 7.6 | Opérateurs normaux .....  | 424 |
| 7.7 | Opérateurs unitaires .....  | 425 |
| 7.8 | Représentation d'un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert séparable ..... | 430 |
|     | EXERCICES .....   | 437 |
|     | PROJETS .....   | 439 |

## CHAPITRE 8 - THÉORIE SPECTRALE

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 8.1 | Valeurs propres d'un opérateur linéaire .....  | 448 |
| 8.2 | Le spectre d'un opérateur linéaire continu .....   | 452 |
| 8.3 | Le spectre d'un opérateur compact sur un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de dimension infinie ..... | 460 |
| 8.4 | Le spectre d'un opérateur auto-adjoint d'un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ .....                   | 467 |
| 8.5 | Le spectre d'un opérateur isométrique et unitaire d'un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ .....        | 471 |
|     | EXERCICES .....  | 474 |
|     | PROJETS .....  | 476 |

## CHAPITRE 9 - FONCTIONS DES OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 9.1 | La décomposition spectrale d'un opérateur compact et auto-adjoint .....              | 478 |
| 9.2 | Polynômes et fonctions holomorphes d'opérateurs bornés .....                         | 481 |
| 9.3 | Fonctions continues d'un opérateur continu et auto-adjoint ..                        | 497 |
| 9.4 | Fonctions semi-continues supérieurement d'opérateurs continus et auto-adjoints ..... | 503 |
| 9.5 | Décomposition spectrale d'un opérateur linéaire continu et auto-adjoint .....        | 507 |
| 9.6 | Fonctions continues et semi-continues d'un opérateur unitaire                        | 519 |
| 9.7 | Décomposition spectrale d'un opérateur unitaire .....                                | 521 |
|     | EXERCICES .....  | 527 |
|     | INDEX ALPHABETIQUE .....   | 529 |
|     | LISTE DE NOTATIONS PRINCIPALES .....   | 535 |

## INTRODUCTION À L'ANALYSE FONCTIONNELLE

Répondant de façon exceptionnelle aux besoins de l'enseignement de l'analyse fonctionnelle, ce livre présente le contenu classique d'un cours en cette matière. Les auteurs insistent sur les résultats fondamentaux qu'ils illustrent par beaucoup d'exemples choisis surtout en analyse et en théorie des probabilités. Pour mieux faire comprendre la théorie et, parfois, la compléter, plusieurs exercices et projets sont proposés. Un soin particulier a été apporté aux démonstrations des théorèmes et aux exemples.

Fruit de la collaboration des professeurs Walter Hengartner de l'Université Laval, Marcel Lambert et Corina Reischer de l'Université du Québec à Trois-Rivières, INTRODUCTION À L'ANALYSE FONCTIONNELLE se distingue tant par l'étendue de son contenu que par l'accessibilité de sa présentation. Sans céder quoi que ce soit sur la rigueur, il est parfaitement adapté à un premier cours d'analyse fonctionnelle. Tout en étant d'abord destiné aux étudiants en mathématiques, il pourra certes être utile aux étudiants de second cycle en sciences et en génie.

3445<sup>s</sup>