

Claude Boucher
Jean-Pierre Sagnet

Calcul différentiel et intégral I



gaëtan morin
éditeur

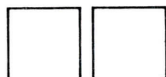
Claude Boucher
Jean-Pierre Sagnet

M833 | T₁

045952
①



Calcul différentiel et intégral I



gaëtan morin
éditeur

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	XI
CHAPITRE 1 : FONCTIONS	1
1.1 ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES	1
1.1.1 Notations	1
1.1.2 Diagrammes de Venn	2
1.1.3 Relations entre ensembles	3
1.1.4 Opérations sur les ensembles	4
1.1.5 Ensembles usuels	8
1.2 L'AXIOMATIQUE DES NOMBRES RÉELS	10
1.3 INTERVALLES ET VOISINAGES SYMÉTRIQUES	12
1.3.1 La valeur absolue	13
1.3.2 Notion de distance dans \mathbb{R}	14
1.3.3 Notion d'intervalle	15
1.3.4 Voisinage symétrique d'un point	17
1.4 LE PLAN CARTÉSIEN	18
1.4.1 Le plan cartésien	18
1.4.2 Notion de distance dans \mathbb{R}^2	19
1.5 FONCTIONS NUMÉRIQUES	21
1.5.1 Notion de fonction numérique	21
1.5.2 Notions de domaine, d'image, de graphe, de graphique	23
1.5.3 Fonctions définies par morceaux	28
1.5.4 Fonctions implicites	29
1.6 ALGÈBRE DES FONCTIONS	31
1.6.1 Somme et produit de deux fonctions	31
1.6.2 Quotient de deux fonctions	32
1.6.3 Composée de deux fonctions	33
1.7 FONCTION LINÉAIRE ET PENTE	35
1.7.1 Notion de fonction linéaire	35
1.7.2 Pente et ordonnée à l'origine d'une droite	36
1.8 FONCTIONS ALGÈBRIQUES : POLYNÔMES, FONCTIONS RATIONNELLES ET IRRATIONNELLES	42
1.8.1 Définitions de base	42
1.8.2 Division de polynômes	43
1.9 FONCTIONS SURJECTIVES, INJECTIVES, BIJECTIVES	45
1.10 FONCTIONS INVERSES	48
1.10.1 Graphe inverse d'un graphe	48
1.10.2 Fonction inverse d'une fonction	50
1.11 EXERCICES RÉCAPITULATIFS	53
CHAPITRE 2 : LIMITES	61
2.1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT	61
2.1.1 Variable voisine d'un nombre réel	62
2.1.2 Valeur limite d'une fonction	66
2.1.3 Extension de la notion de limite	72
2.2 PROPRIÉTÉS DES LIMITES	73
2.3 LIMITES À L'INFINI DE FONCTIONS RATIONNELLES	76
2.4 ASYMPTOTES	78
2.4.1 Asymptote à une courbe	78

VIII Table des matières

2.4.2	Asymptotes verticales	79
2.4.3	Asymptotes horizontales	80
2.4.4	Asymptotes obliques	81
2.5	EXERCICES RÉCAPITULATIFS	89
CHAPITRE 3 : CONTINUITÉ		91
3.1	CONTINUITÉ EN UN POINT	91
3.1.1	Continuité d'une fonction en un point	91
3.1.2	Signification graphique de la continuité et les diverses discontinuités	92
3.2	OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES	99
3.3	CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE	100
3.3.1	Définitions	100
3.3.2	Continuité des fonctions algébriques	100
3.4	EXERCICES RÉCAPITULATIFS	102
CHAPITRE 4 : DÉRIVÉES DES FONCTIONS ALGÈBRIQUES		105
4.1	INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA DÉRIVÉE	105
4.2	DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE	109
4.3	DÉRIVÉE DES FONCTIONS $f(x) = x^a$	110
4.3.1	Dérivée de la fonction constante $y = c$	110
4.3.2	Dérivée des monômes $y = x^n$ où $n \in \mathbf{N} - \{0\}$	111
4.3.3	Dérivée de la fonction $y = x^a$ où $a \in \mathbf{R}^*$	112
4.4	DÉRIVATION DES SOMMES, DES PRODUITS ET DES QUOTIENTS DE FONCTIONS	112
4.4.1	Dérivée du produit d'une fonction par une constante	112
4.4.2	Dérivée d'une somme de fonctions	114
4.4.3	Dérivée d'un produit de fonctions	116
4.4.4	Dérivée d'un quotient de fonctions	118
4.5	DÉRIVÉE DES FONCTIONS COMPOSÉES	122
4.6	DÉRIVÉES DES FORMES IMPLICITES	125
4.7	DÉRIVÉES SUCCESSIVES	128
4.8	RÉSUMÉ DES FORMULES DE DÉRIVATION	130
4.9	EXERCICES RÉCAPITULATIFS	130
CHAPITRE 5 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES		133
5.1	LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES	133
5.1.1	La fonction exponentielle de base a	137
5.1.2	La fonction logarithmique de base a	140
5.2	LE NOMBRE "e"	140
5.2.1	Construction du nombre e	142
5.2.2	Exemple concret d'utilisation du nombre e	143
5.3	DÉRIVÉES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES	143
5.3.1	Les fonctions exponentielle et logarithmique naturelles et leurs dérivées	146
5.3.2	Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques de base a	149
5.4	DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE	149
5.4.1	Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$ avec $u(x) > 0$	150
5.4.2	Utilisation de la dérivée logarithmique	151
5.5	RÉSUMÉ DES FORMULES DE DÉRIVATION	152
5.6	EXERCICES RÉCAPITULATIFS	152

CHAPITRE 6 : ÉTUDE DES FONCTIONS (CONSTRUCTION DES COURBES)	155
6.1 CROISSANCE, DÉCROISSANCE ET MONOTONIE	155
6.1.1 Fonctions croissantes	155
6.1.2 Fonctions décroissantes	159
6.1.3 Fonctions monotones	162
6.2 EXTREMUMS : MAXIMA ET MINIMA	163
6.2.1 Maxima et minima absolus	163
6.2.2 Maxima et minima relatifs	164
6.2.3 Recherche d'extremums relatifs	165
6.3 CONVEXITÉ ET CONCAVITÉ	171
6.3.1 Courbes convexes	171
6.3.2 Courbes concaves	174
6.4 POINT D'INFLEXION	176
6.5 LA CONSTRUCTION DES COURBES	179
6.5.1 Méthode pour la construction des courbes	179
6.6 EXERCICES RÉCAPITULATIFS	185
CHAPITRE 7 : MATHÉMATISATION DES SITUATIONS CONCRÈTES	187
7.1 PROBLÈMES D'OPTIMISATION	187
7.2 MOUVEMENT LINÉAIRE	190
7.3 PROBLÈMES DE RELATION ENTRE TAUX DE VARIATION INSTANTANÉS	192
7.4 APPROXIMATIONS ET CALCUL D'ERREURS	194
7.5 EXERCICES RÉCAPITULATIFS	197
CHAPITRE 8 : LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET LEURS INVERSES	201
8.1 DÉFINITIONS ET IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES	201
8.1.1 Cercle trigonométrique et angles	201
8.1.2 Les rapports trigonométriques d'un angle	204
8.1.3 Identités trigonométriques	208
8.1.4 Pente de la tangente à une courbe	210
8.1.5 Fonctions périodiques	212
8.2 UNE LIMITE IMPORTANTE	214
8.3 DÉRIVÉES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES	216
8.3.1 Dérivée de la fonction $y = \sin x$	216
8.3.2 Dérivées des fonctions $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{sec} x$, $\operatorname{cosec} x$	217
8.3.3 Résumé des principales formules de dérivation des fonctions trigonométriques	220
8.4 ÉTUDE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES	221
8.4.1 Fonctions paires et fonctions impaires	221
8.4.2 Étude de la fonction $y = \sin x$	223
8.4.3 Étude de la fonction $y = \cos x$	224
8.4.4 Étude de la fonction $y = \operatorname{tg} x$	225
8.4.5 Autres exemples d'étude de fonctions trigonométriques	227
8.5 LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES	230
8.5.1 La fonction ARC SINUS	230
8.5.2 La fonction ARC COSINUS	232
8.5.3 La fonction ARC TANGENTE	233
8.6 DÉRIVÉES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES	234
8.6.1 Dérivée de la fonction $y = \arcsin x$	234
8.6.2 Dérivée de la fonction $y = \arccos x$	235

X Table des matières

8.6.3	Dérivée de la fonction $y = \arctg x$	235
8.6.4	Résumé des dérivées des fonctions trigonométriques inverses	237
8.7	EXERCICES RÉCAPITULATIFS	239
CHAPITRE 9 : CALCUL INTÉGRAL		244
9.1	DIFFÉRENTIELLES	244
9.2	INTÉGRALE INDÉFINIE	244
9.3	FORMULES D'INTÉGRATION DE BASE	245
9.4	CALCULS D'AIRES	249
9.5	INTÉGRALE DÉFINIE	253
9.6	MOUVEMENT LINÉAIRE	255
9.7	EXERCICES RÉCAPITULATIFS	259
ANNEXE 1 : TRIANGLE DE PASCAL ET BINÔME DE NEWTON		261
A1.1	NOTATION FACTORIELLE	261
A1.2	SYMBOLE DE SOMMATION	262
A1.3	COMBINAISON	262
A1.4	TRIANGLE DE PASCAL	264
A1.5	BINÔME DE NEWTON	265
ANNEXE 2 : THÉORIE DES LIMITES		269
Introduction		269
A2.1	VARIABLE RÉELLE VOISINE D'UN NOMBRE	269
A2.2	VARIABLE INFINIMENT GRANDE	271
A2.3	VALEUR LIMITE D'UNE FONCTION	272
A2.4	UNICITÉ DE LA LIMITE	275
A2.5	FONCTION BORNÉE	276
A2.6	PROPRIÉTÉS DES LIMITES	277
A2.7	LIMITES À L'INFINI	281
ANNEXE 3 : COMPLÉMENTS FORMELS SUR LA CONTINUITÉ		285
RÉPONSES		289
INDEX		329



Claude BOUCHER, B.A., B.Sc. (Mathématiques), dipl. de l'E.N.S., M.Sc. (Mathématiques), a enseigné à l'École de génie et de commerce de Chicoutimi. Il enseigne présentement au Collège de Chicoutimi. Son expérience dans l'enseignement des mathématiques aux niveaux collégial et universitaire l'a amené à s'intéresser aux applications des mathématiques à des situations concrètes.



Jean-Pierre SAGNET, B.Sc., M.Sc., C.Sc. Educ., a fait carrière dans l'enseignement collégial. Il enseigne présentement au Collège de Chicoutimi. Il s'intéresse à l'expérimentation pédagogique et poursuit depuis plusieurs années des recherches en analyse combinatoire qui l'ont amené à présenter certains résultats qu'il a obtenus sur l'inversion combinatoire double multidirectionnelle lors de congrès internationaux de mathématiques.

Calcul différentiel et intégral I

Nous avons écrit ce manuel afin de présenter aux étudiants des programmes professionnel et général du collège un instrument indispensable à leur cheminement scientifique. Nous avons fait un exposé complet sur le sujet et nous insistons beaucoup sur la compréhension de la matière et sur l'application des notions mathématiques au moyen de nombreux exemples et graphiques.

Le volume comporte neuf chapitres et trois annexes. Le premier chapitre porte sur la notion de fonction et introduit tous les éléments de base pour aider à la compréhension du volume. Le deuxième chapitre traite de la limite, le troisième de la continuité, les quatrième, cinquième et huitième présentent la dérivée des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques et trigonométriques. Dans le chapitre six, on étudie la construction des courbes à partir des deux premières dérivées; dans le chapitre sept, on présente plusieurs applications de la théorie de la dérivée. Dans le neuvième chapitre, on fait une introduction au calcul intégral. Les trois annexes portent sur le binôme de Newton, la théorie des limites et la présentation formelle de la continuité.

 **gaëtan morin éditeur**

C.P. 965, CHICOUTIMI, QUÉBEC, CANADA, TÉL.: (418) 545-3333

ISBN 2-89105-142-4