

Jean Kuntzmann

Méthodes numériques

Hermann

Enseignement des sciences



M 828

Jean Kuntzmann

Professeur à la faculté des sciences de Grenoble

046116
①

Méthodes numériques



Hermann

156, boulevard Saint-Germain Paris VI

Table

INTRODUCTION	17
CHAPITRE I. ALGORITHMES EN FILE	
I. <i>Généralités</i>	
1.1. Définition d'une file	21
2.1. Drapeau	21
2.2. Pointeur	22
2.3. Exemple	22
2.4. Autre exemple	23
3.1. Pile	24
3.2. Exemple	24
4.1. Théorie des algorithmes	24
4.2. Description d'un algorithme	25
4.3. Remarque	27
4.4. Schéma de Hörner	27
II. <i>Écriture des nombres</i>	
5.1. Remarques sur l'écriture chiffrée des nombres	28
5.2. Écriture chiffrée des entiers positifs	29
5.3. Nom en français d'un entier	29
6.1. Écriture des entiers relatifs	29
6.2. Cas du nombre nul	30
6.3. Écriture sans signe	30
7.1. Écriture des nombres décimaux	30
7.2. Écriture des nombres très grands ou très petits	31
8.1. Écriture des nombres en virgule flottante	31
8.2. Virgule flottante normalisée	31
8.3. Cas du nombre nul	32

III. *Opérations sur les nombres*

9.1. Étude de l'égalité	33
9.2. Étude de la comparaison	33
9.3. Comparaison descendante	34
9.4. Comparaison ascendante de nombres positifs	34
9.5. Comparaison accélérée	35
10.1. Addition. Remarques préliminaires	35
10.2. Addition d'entiers positifs	36
11.1. Addition en écriture sans signe	37
11.2. Cas de la base 2	38
12.1. Multiplication binaire	38
12.2. Multiplication accélérée en décimal	38

IV. *Changements de base de numération*

13.1. Codage, décodage	41
14.1. Codage d'un entier	41
14.2. Décodage d'un entier	42
15.1. Codage d'un nombre sans partie entière	43
15.2. Décodage d'un nombre sans partie entière	44
15.3. Pratique du décodage	44

Solutions des exercices du chapitre I

Solutions des problèmes du chapitre I

CHAPITRE II. SYNTAXE DES EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES

I. *Généralités*

1.1. Files et expressions	57
1.2. Remarque	57
2.1. Alphabet	58
2.2. Langage	58
2.3. Syntaxe	58
2.4. Sémantique	58
2.5. Exemples	59

II. *Expressions non parenthésées*

3.1. Limitation du sujet	60
3.2. Alphabet	60
4.1. Emploi d'un métalangage	60
4.2. Métalangage de Backus	60
5.1. Langage des expressions non parenthésées	61
5.2. Condition nécessaire et suffisante de correction syntaxique	61

6.1. Sémantique de gauche à droite	62
7.1. Sémantique avec priorité de la multiplication	62
7.2. Remarque sur l'écriture algébrique classique	63
7.3. Calcul pratique d'une expression avec priorité de la multiplication	64
III. <i>Syntaxe des parenthèses</i>	
8.1. Parenthèses	64
8.2. Langage des parenthèses	65
9.1. Condition nécessaire de correction syntaxique	65
9.2. Théorème d'existence	65
10.1. Paire de parenthèses	66
10.2. Emploi d'une pile pour trouver les paires de parenthèses	67
10.3. Théorème de décomposition	67
IV. <i>Expressions parenthésées</i>	
11.1. Expressions parenthésées	68
11.2. Expression parenthésée large	68
11.3. Conditions nécessaires de correction syntaxique	68
11.4. Caractère suffisant de ces conditions	69
12.1. Sémantique des expressions parenthésées	69
13.1. Expression totalement parenthésée large	70
13.2. Expression totalement parenthésée stricte	71
13.3. Expression parenthésée minimale	71
V. <i>Notation pré et post fixée</i>	
14.1. Notation préfixée	74
14.2. Langage des expressions post fixées	75
14.3. Lien avec le langage des parenthèses	75
15.1. Théorème d'unicité	76

Solutions des exercices du chapitre II

Solutions des problèmes du chapitre II

CHAPITRE III. APPROXIMATION

I. *Généralités*

1.1. Cas d'un ensemble ayant une structure de groupe	85
1.2. État actuel de l'enseignement de ces notions	86
1.3. Erreur relative	86
2.1. Informations sur l'approximation	87

II. <i>Encadrement</i>	
3.1. Approximation par défaut, par excès	88
3.2. Théorème des fonctions monotones	88
4.1. Calcul par encadrement	88
4.2. Cas d'un double intervalle	89
4.3. Changement d'intervalle	89
III. <i>Emploi d'une norme</i>	
5.1. Incertitude	90
5.2. Incertitude d'une table	90
5.3. Incertitude d'une combinaison linéaire	90
6.1. Approximation et convergence	91
IV. <i>Approximations décimales systématiques</i>	
7.1. Partie entière d'un réel	93
7.2. Cas de l'écriture sans signe	93
8.1. Approximation décimale par défaut d'ordre n	94
8.2. Approximation décimale par excès d'ordre n	94
9.1. Changement d'ordre décimal	94
10.1. Partie entière naturelle de a	95
10.2. Obtention de la partie entière naturelle dans le cas de l'écriture avec signe	96
11.1. Approximation décimale naturelle d'ordre n	96
11.2. Changement d'ordre décimal	96
12.1. Meilleure approximation d'ordre n	97
12.2. Arrondi automatique d'ordre n	97
12.3. Propriétés de l'arrondi automatique	98
13.1. Détermination d'une valeur approchée décimale d'ordre n de l'un des trois types précédents à partir d'une approximation	98
14.1. Approximation flottante d'ordre n	99
<i>Solutions des exercices du chapitre III</i>	
<i>Solutions des problèmes du chapitre III</i>	

CHAPITRE IV. NOTIONS SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES

I. <i>Système d'équations algébriques linéaires</i>	
1.1. Rappel de résultats	105
1.2. Aspect numérique de la résolution	105
2.1. Principes de résolution	106

3.1. Méthode de triangularisation de Gauss	107
3.2. Nombre d'opérations	108
4.1. Choix des pivots	108
4.2. Système mal conditionné	109
 II. <i>Polynomes. Interpolation</i>	
5.1. Polynome de degré n prenant des valeurs données pour $n + 1$ valeurs de la variable	110
5.2. Coefficients de Lagrange	111
5.3. Expression du polynome prenant les valeurs données	111
6.1. Formule barycentrique	111
7.1. Formule de Newton	112
7.2. Changement du nombre de points	113
7.3. Emploi numérique de la formule de Newton	113
8.1. Cas des points équidistants	114
8.2. Différences progressives	114
8.3. Formule de Newton Gregory	114
9.1. Interpolation	115
9.2. Correction d'interpolation	115
9.3. Dérivées et différences	116
10.1. Formule de Taylor avec reste intégral	116
10.2. Expression intégrale de la correction d'interpolation	117
 III. <i>Quadratures approchées</i>	
11.1. Principe des méthodes	118
11.2. Emploi de la forme de Lagrange	118
11.3. Recherche pratique des poids	119
12.1. Translation pour $a(t) : = 1$	119
12.2. Homothétie pour $a(t) : = 1$	120
12.3. Symétrie pour $a(t) : = 1$	120
13.1. Formule symétrique ayant un nombre impair de points pour $a(t) : = 1$	120
14.1. Expression de la correction de quadrature	121
14.2. Cas des formules définies	121
15.1. Formules de degré 0	122
15.2. Formule de Poncelet	122
15.3. Formule des trapèzes	123
16.1. Formule de Simpson	123
17.1. Utilisation pratique des formules	124
17.2. Cas de la formule des trapèzes	125
17.3. Cas de la formule de Simpson	125

IV. *Problèmes différentiels*

18.1. Problème différentiel de conditions initiales	126
19.1. Méthode de la tangente	126
19.2. Convergence.....	126
19.3. Méthode de la tangente améliorée	126
20.1. Méthode d'Adams implicite d'ordre 1	127
20.2. Méthode d'Adams explicite d'ordre 1	128
21.1. Méthode de Nyström	129
21.2. Instabilité	129

Solutions des exercices du chapitre IV

Solutions des problèmes du chapitre IV

CHAPITRE V. CLASSIFICATION ET MANIPULATION DES ERREURS

I. *Classification des erreurs*

1.1. Les quatre catégories d'erreur	135
1.2. Erreurs dues aux méthodes	135
1.3. Erreurs dues à l'écriture des nombres.....	136
1.4. Erreurs dues aux instruments	136
1.5. Erreurs dues à l'imprécision des données	137

II. *Propagation des erreurs*

2.1. Méthode habituelle de calcul des erreurs.....	137
2.2. Exemple	138
3.1. Source d'erreur	138
3.2. Erreurs provenant de la même source	138
4.1. Erreur propagée	139
4.2. Premier exemple d'évaluation de l'erreur globale	140
4.3. Second exemple	141
5.1. Transport d'une erreur	141
6.1. Neutralité des erreurs	141
6.2. Exemple d'évaluation simplifiée des erreurs dans le cas de la neutralité	142

III. *Problèmes généraux sur les erreurs*

7.1. Impossibilité habituelle d'une étude à priori des erreurs	144
7.2. Problème principal et problème secondaire	145
8.1. Problème principal à postériori	145

8.2. Évaluation indépendante de l'erreur	145
8.3. Établissement d'un plan de calcul lorsque des conditions sont imposées à l'erreur	146
9.1. Comparaison expérimentale de méthodes au point de vue de l'erreur	146
9.2. Problème secondaire	147
9.3. Étude de l'erreur pour un ensemble de problèmes similaires	147

Solutions des exercices du chapitre V

Solutions des problèmes du chapitre V

CHAPITRE VI. VÉRIFICATION. CONTRÔLE

1.1. Faute	151
1.2. Attitude à tenir devant les fautes	151

I. Vérifications

2.1. Généralités	151
3.1. Vérifications opératoires	152
3.2. Preuves arithmétiques	152
3.3. Vérification par identités fonctionnelles	153
3.4. Vérifications linéaires	153
4.1. Vérifications par l'aspect des résultats	154
4.2. Vérification par l'ordre de grandeur ou le signe	154
5.1. Constatations empiriques	154
5.2. Vérification par conditions physiques	154
6.1. Vérification d'une famille de calculs voisins	156
6.2. Cas où les calculs diffèrent par la valeur d'un paramètre	156
6.3. Emploi de différences	156
6.4. Cohérence interne des résultats	156
6.5. Cas d'une itération	157
7.1. Vérification par reprise du calcul	157
7.2. Vérification par répétition identique	157
7.3. Vérification par calcul différent	157
7.4. Relations avec l'évaluation des erreurs	158
8.1. Vérification par fermeture	158
9.1. Efficacité d'une vérification	159
9.2. Plan de vérifications	159
10.1. La certitude en calcul	160
11.1. Localisation de fautes	160
11.2. Réflexion sur la nature du calcul et de la faute	160

11.3. Recherche de fautes par sectionnement du calcul	161
11.4. Remarque sur la nature des fautes	161
 III. <i>Contrôle</i>	
12.1. Contrôle	162
13.1. Informations préliminaires	162
14.1. Contrôle complet. Contrôle partiel	162
14.2. Mise sur pied d'un programme de contrôle.....	163
14.3. Comparaison avec des résultats indépendants	164
15.1. Correction éventuelle de fautes reconnues	164
15.2. Recherche de l'origine d'une faute reconnue	164

Solutions des exercices du chapitre VI

Solutions des problèmes du chapitre VI

CHAPITRE VII. CONNAISSANCE DES MATÉRIELS ET CONSEILS PRATIQUES.

I. *Connaissance des matériels*

1.1. Calcul à la main	169
1.2. Calcul à la règle	169
2.1. Calcul à la machine de bureau	170
2.2. Remarques sur les décimales	171
3.1. Tables	171
4.1. Machine à programme	171
5.1. Méthodes graphiques et analogiques	172
5.2. Opérations de base des méthodes graphiques	172
5.3. Caractère irrationnel de diverses opérations graphiques	172
5.4. Inaptitude des méthodes graphiques à manier des êtres à plus de deux dimensions	173
5.5. Caractère irréversible des méthodes graphiques	173

II. *Conseils pour l'exécution de calculs*

6.1. Conseils généraux	173
6.2. Rendement	174
7.1. Quelques conseils pratiques	174
8.1. Algorithmes standard	175
9.1. Organisation de calculs	175
9.2. Exemple	176

Solutions des exercices du chapitre VII

CHAPITRE VIII. CONSTRUCTION DE TABLES

1.1. Caractères généraux du calcul des tables	179
1.2. Ancienneté du calcul des tables.....	179
1.3. Évolution historique	180
2.1. État actuel et tendances	180
3.1. Opportunité de construire une table	181
3.2. Les limites de la tabulation	181
3.3. Rentabilité d'une table	181
4.1. Fixation des caractéristiques d'une table à construire	182
4.2. Choix des quantités à tabuler	182
4.3. Choix du pas	183
5.1. Quantités auxiliaires à tabuler	184
6.1. Utilisation de tables plus étendues	184
6.2. Calcul proprement dit	184
6.3. Vérifications	185
7.1. Indications sur l'incertitude	185
8.1. Présentation matérielle	186
8.2. Procédé de reproduction	186
<i>Solutions des exercices du chapitre VIII</i>	
<i>Solutions des problèmes du chapitre VIII</i>	
INDEX	189

125

Enseignement des sciences



la marque des meilleurs
livres scientifiques

Les ouvrages de cette collection s'adressent aux étudiants de sciences de divers niveaux. Œuvres de spécialistes éminents qui, tout en suivant les programmes universitaires, apportent des vues personnelles au traitement de leur discipline, ces volumes sont autant des livres de référence générale que des manuels d'enseignement. Largement utilisés dans les universités françaises et étrangères, ils intéressent autant les étudiants que les chercheurs.

Jean Kuntzmann Professeur à la Faculté des sciences de Grenoble

Méthodes **numériques**

Henri Cartan Professeur à la Faculté des sciences de Paris

Théorie élémentaire des **fonctions analytiques** d'une ou plusieurs variables complexes

Deuxième édition. Quatrième tirage

Laurent Schwartz Professeur à la Faculté des sciences de Paris

Méthodes **mathématiques** pour les sciences physiques

Deuxième édition. Quatrième tirage

Roger Godement Professeur à la Faculté des sciences de Paris

Cours d'**algèbre**

Troisième édition

Gustave Choquet Professeur à la Faculté des sciences de Paris

L'enseignement de la **géométrie**

Deuxième tirage

Jean Dieudonné Professeur à la Faculté des sciences de Nice

Algèbre linéaire et géométrie élémentaire

Deuxième édition. Troisième tirage

Noël Gastinel Professeur à la Faculté des sciences de Grenoble
Directeur-adjoint du laboratoire de calcul de l'Université de Grenoble

Analyse numérique linéaire

J. Leite Lopes Directeur de l'institut de physique de l'Université de Rio-de-Janeiro

Fondements de la **physique atomique**