

044233

calcul intégral

Bernard Candelpergher

C A S S I N I

M 814

BERNARD CANDELPERGHER

Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE
N° d'inventaire 53606

4/5
044599
⑤

Calcul intégral



CASSINI

Table des matières

Avant-propos	XI
Notations et terminologie	I
Introduction	5
Chapitre 1. L'intégrale des fonctions continues	II
1.1. Propriétés élémentaires	11
1.1.1. Premières propriétés	13
1.1.2. Intégrales et primitives	14
1.1.3. Deux formules indispensables	18
1.1.4. La formule de Taylor avec reste intégral	20
1.2. Les intégrales impropres	22
1.2.1. Définitions	22
1.2.2. Quelques propriétés	23
1.2.3. Lien entre série et intégrale	26
1.2.4. Intégrales absolument convergentes	26
1.3. Permutation des symboles \lim , \sum et \int	32
1.3.1. Le cas des intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$	32
1.3.2. Le cas des intégrales impropres	35
1.3.3. Théorèmes de permutation de Lebesgue	37
1.3.4. Permutation dans le cas semi-convergent	39
1.4. Fonctions définies par une intégrale	41
1.4.1. Les théorèmes de Lebesgue	42
1.4.2. Un théorème « classique »	49
1.5. La fonction Γ	50
1.6. Intégrales de Laplace	52
1.6.1. Lemme de Watson	52
1.6.2. Méthode de Laplace	56
1.6.3. La méthode de la phase stationnaire	61
1.7. La formule d'Euler-MacLaurin	64
1.7.1. Les polynômes de Bernoulli	65
1.7.2. La formule d'Euler-MacLaurin	66
1.7.3. Développement asymptotique des sommes partielles d'une série	70
1.7.4. La constante de Ramanujan d'une série	75

Appendice : continuité uniforme et existence de l'intégrale	76
Exercices	80
Chapitre 2. Intégrales et résidus	85
2.1. Analyticité et dérivabilité	85
2.1.1. Définitions et propriétés	85
2.1.2. Construction de fonctions analytiques	96
2.2. Intégrale curviligne	99
2.2.1. Définition	99
2.2.2. Homotopie	102
2.2.3. Le problème des primitives	107
2.3. Prolongement analytique et points singuliers	109
2.3.1. Prolongement analytique	109
2.3.2. Points singuliers	113
2.3.3. Théorème des résidus	118
2.3.4. Logarithme et puissances complexes	121
2.4. La fonction Gamma dans le plan complexe	126
2.5. Calculs d'intégrales	129
2.6. Calculs de sommes	140
2.6.1. Utilisation de la cotangente	140
2.6.2. Formule de Plana	143
2.7. La méthode du col	148
2.7.1. Le choix du chemin	148
2.7.2. Étude locale au col	152
2.7.3. Application : Comportement en $+\infty$ de la fonction d'Airy	154
Exercices	157
Chapitre 3. L'intégrale de Lebesgue	161
3.1. Une première extension de l'intégrale	161
3.2. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	164
3.3. Les fonctions mesurables	169
3.4. Intégration des fonctions mesurables	174
3.4.1. Intégration des fonctions étagées positives	174
3.4.2. Intégration des fonctions mesurables positives	176
3.4.3. Intégration des fonctions intégrables quelconques	180
3.4.4. Presque partout	182
3.4.5. La relation intégrale \Leftrightarrow primitive	183
3.5. Théorèmes de permutation	185
3.6. Lien avec l'intégrale usuelle	190
3.7. Fonctions définies par une intégrale	193
3.8. Intégration par rapport à une autre mesure	193
Exercices	197

Chapitre 4. Intégrales multiples**201**

4.1. L'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	201
4.1.1. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	202
4.1.2. Intégration des fonctions définies sur \mathbb{R}^n	207
4.1.3. Intégrabilité et calcul des intégrales	208
4.2. Changement de variables dans \mathbb{R}^n	216
4.3. Intégrales liées aux courbes et aux surfaces	226
4.3.1. L'intégrale sur une courbe de \mathbb{R}^2	226
4.3.2. L'intégrale sur une surface de \mathbb{R}^3	230
4.4. Formule de Stokes	233
4.5. Les fonctions harmoniques sur \mathbb{R}^2	237
Exercices	242

Chapitre 5. Espaces L^p et convolution**249**

5.1. Préliminaires topologiques	249
5.1.1. Espaces normés	249
5.1.2. Espaces de Hilbert	256
5.1.3. Le théorème de Stone-Weierstrass	258
5.2. L'espace des fonctions intégrables	259
5.2.1. Définition de $L^1(A)$. $L^1(A)$ est complet	259
5.2.2. Lien entre convergence presque partout et convergence L^1	264
5.3. L'espace des fonctions de carré intégrable	266
5.3.1. Définition de $L^2(A)$. $L^2(A)$ est complet	266
5.3.2. L^1 , L^2 et convergence presque partout	270
5.4. Sous-espaces denses	272
5.5. Les polynômes de Legendre	275
5.6. Fonctions d'Hermite et espace de Bargmann	280
5.7. Espaces L^p , $p > 1$	284
5.8. Convolution sur \mathbb{R}	286
5.8.1. Définitions et propriétés	286
5.8.2. Régularisation gaussienne	295
Exercices	299

Chapitre 6. Les séries de Fourier**303**

6.1. Position du problème	303
6.2. Les séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$	304
6.3. Convergence L^2	307
6.4. Convergence ponctuelle	312
6.5. Convolution	323
6.6. La transformation $\mathcal{F}_{\text{pér}}$	324

6.7. Procédés de sommation des séries de Fourier	329
6.7.1. Sommation de Cesàro	329
6.7.2. Noyaux réguliers	331
6.7.3. Sommation d'Abel	335
6.8. L'intervention de l'analyse fonctionnelle	340
Exercices	346
Chapitre 7. Transformation de Fourier	351
7.1. Des séries de Fourier à la transformation de Fourier	351
7.2. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$	352
7.3. Transformée de Fourier des gaussiennes	356
7.4. Inversion de la transformation de Fourier	359
7.5. Formule d'inversion ponctuelle	362
7.6. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	365
7.7. Transformation de Fourier et convolution	366
7.8. La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	368
7.8.1. Définition et propriétés de \mathcal{F} sur $L^2(\mathbb{R})$	368
7.8.2. Calcul pratique de $\mathcal{F}f$	376
7.9. Noyaux de sommation pour les intégrales de Fourier	378
7.10. Fourier dans l'espace de Bargmann	379
7.11. Propriétés de localisation et de support	382
7.11.1. L'inégalité de Heisenberg	383
7.11.2. Le théorème de Paley-Wiener	385
7.12. Un point de vue unificateur : les distributions	389
7.12.1. Les distributions	389
7.12.2. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	391
Exercices	397
Chapitre 8. De l'équation de la chaleur aux nombres premiers.	401
8.1. L'équation de la chaleur	401
8.2. La formule de Poisson	406
8.2.1. La formule de Poisson sur \mathbb{R}	406
8.2.2. Développement de la cotangente	410
8.3. La fonction zêta	412
8.3.1. La formule d'Euler	412
8.3.2. Expression intégrale et équation fonctionnelle pour la fonction ζ	413
8.4. Fonctions entières et produits infinis	416
8.4.1. Convergence d'un produit infini	416
8.4.2. Produit infini de fonctions	418
8.4.3. Factorisation d'une fonction entière	420
8.4.4. Les fonctions Γ et sinus comme produits infinis	421
8.5. Les zéros de ζ	423

8.5.1. Les zéros triviaux	423
8.5.2. Les zéros non triviaux	424
8.5.3. Le développement de ζ en produit infini	426
8.6. La répartition des nombres premiers	427
8.6.1. Fonctions de comptage	427
8.6.2. La fonction ψ et la dérivée logarithmique de ζ	430
8.7. Transformation de Mellin	431
8.7.1. Définition et prolongement analytique	431
8.7.2. L'inversion de Mellin	433
8.7.3. La formule explicite de von Mangoldt	437
8.8. L'article de Riemann sur les nombres premiers	439
Petits sujets de réflexion	447

Bibliographie	455
----------------------	------------

Index	457
--------------	------------

L'objectif de ce livre, écrit pour les étudiants de troisième année de licence, mais qui conviendra à un public plus large, est l'enseignement de l'analyse : l'intégrale de Lebesgue γ est considérée comme un outil, et non comme l'objet principal de l'étude. Les définitions et les techniques fondamentales étant mises en place aussi rapidement que possible, il s'agit d'apprendre à les utiliser. L'auteur observe en même temps que beaucoup de questions d'analyse ne se comprennent bien qu'en « passant dans le complexe ». Si les fonctions analytiques sont souvent enseignées à part, dans toutes les grandes questions d'analyse, techniques de calcul intégral, analyse de Fourier et utilisation de la variable complexe sont en fait étroitement associées.

Un chapitre est donc consacré à l'analyse complexe immédiatement après le chapitre qui traite de l'intégration des fonctions continues et avant ceux qui sont consacrés à l'intégrale de Lebesgue (intégration dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^n , espaces L^p , convolution) et aux séries et intégrales de Fourier.

La volonté d'enseigner le calcul intégral par son usage se manifeste aussi dans les très belles applications disséminées tout au long de l'ouvrage, et toujours traitées simplement : méthodes de Laplace et de la phase stationnaire, formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, méthode du col, fonction d'Airy, aire de la sphère, poussée d'Archimède, polynômes de Legendre, quadrature gaussienne, espace de Bargmann..., applications qu'on rencontre rarement dans les cours d'intégration. Le dernier chapitre résume cette approche. On γ montre comment avec un peu d'analyse de Fourier et de fonctions analytiques on peut obtenir de magnifiques formules liées à l'équation de la chaleur et aux nombres premiers.

Collection enseignement des mathématiques

ISBN 978-2-84225-053-9

32 €



9 782842 250539

Graphisme : Massin