

Patrice ROVIRA

M **G** **Mathématiques** **n** **é** **r** **a** **l** **e** **s**

**pour 1^{er} cycle
universitaire
et
formation continue**

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE
N° d'Inventaire 53753

M 801

044 833

(3)

Mathématiques générales



pour 1^{er} cycle universitaire
et formation continue

Patrice ROVIRA

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE - France

Tél. : 05 61 40 57 36 - Fax : 05 61 41 79 89
(de l'étranger) + 33 5 61 40 57 36 - Fax : + 33 5 61 41 79 89

<http://www.cephadues.com>

e.mail: cephadues@cephadues.com

Table des matières

1	Introduction – Généralités	11
1.1	Introduction	12
1.2	Ensembles – Relations	13
1.3	Relation binaire sur un ensemble E	16
1.4	Lois de composition – Structures d'ensembles	21
1.5	Applications et fonctions	26
1.6	Exercices	33
2	Analyse combinatoire	37
2.1	Introduction	38
2.2	Raisonnement par récurrence	38
2.3	Définition de la factorielle	39
2.4	Arrangements ou permutations	39
2.5	Combinaisons	41
2.6	Formule du binôme de Newton	42
2.7	Applications du binôme de Newton	43
2.8	Exercices	45
3	Les nombres complexes	49
3.1	Introduction	50
3.2	Ensemble des entiers naturels positifs \mathbb{N}	51
3.3	Anneau des entiers relatifs \mathbb{Z}	51
3.4	Corps des nombres rationnels \mathbb{Q}	51
3.5	Corps des nombres réels \mathbb{R}	51
3.6	Corps des nombres complexes \mathbb{C}	52
3.7	Représentation géométrique	54
3.8	Nombre complexe conjugué	55
3.9	Représentation trigonométrique	56
3.10	Forme algébrique et forme trigonométrique	60
3.11	Formule de De Moivre	61
3.12	Notation exponentielle d'un nombre complexe	63
3.13	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	63
3.14	Corps algébriquement clos	65
3.15	Racines carrées d'un nombre complexe	65
3.16	Équations du second degré dans \mathbb{C}	67
3.17	Formules d'Euler	67
3.18	Linéarisation des polynômes	68
3.19	Exercices	68
4	Fonctions numériques	79
4.1	Généralités	81
4.2	Fonctions d'une variable réelle	81
4.3	Algèbre des fonctions continues	90
4.4	Continuité uniforme d'une fonction	94
4.5	Fonctions réciproques	95
4.6	Algèbre des fonctions dérivables	96

4.7	Dérivée sur un intervalle fermé	99
4.8	Dérivée et sens de variation d'une fonction	100
4.9	Dérivée d'ordre supérieur – Formule de Leibniz	101
4.10	Fonctions indéfiniment continûment dérivables	102
4.11	Dérivée d'une composée de fonctions	102
4.12	Dérivée d'une fonction réciproque	103
4.13	Dérivée d'une fonction homographique	104
4.14	Plan d'étude d'une fonction	104
4.15	Fonctions convexes	107*
4.16	Exercices	109
5	Fonctions circulaires réciproques	117
5.1	Introduction	118
5.2	Étude de la fonction arcsin	118
5.3	Étude de la fonction arccos	119
5.4	Étude de la fonction arctg	120
5.5	Étude de la fonction arccotg	120
5.6	Remarques sur les dérivées	121
5.7	Formules importantes	121
5.8	Exercices	122
6	Théorème de Rolle – Accroissements finis	129
6.1	Théorème de Rolle	130
6.2	Théorème des accroissements finis	132
6.3	Généralisation de la formule des accroissements finis	134
6.4	Théorème de Guillaume de L'Hôpital	134
6.5	Applications du théorème de Lagrange	137
6.6	Développements « asymptotiques »	138
6.7	Exercices	140
7	Primitives – Intégrales	145
7.1	Introduction	146
7.2	Définition de la primitive d'une fonction	147
7.3	Définition de l'intégrale d'une fonction	148
7.4	Propriétés fondamentales	149
7.5	Espace vectoriel des fonctions intégrables	150
7.6	Théorèmes de la moyenne	151
7.7	Intégrale d'une fonction bornée	154
7.8	Intégrale de Riemann	155
7.9	Théorème de Schwarz	157
7.10	Intégrale d'une fonction réelle à valeurs complexes	157
7.11	Exercices	158
8	Logarithmes et exponentielles	169
8.1	Logarithme népérien	170
8.2	Étude de la fonction $f(x) = \ln x $	174
8.3	Fonction logarithme de base a	175
8.4	Fonction exponentielle de base quelconque	176
8.5	Étude de la fonction exponentielle népérienne	178
8.6	Importance de la fonction exponentielle	181
8.7	Fonction exponentielle généralisée	181
8.8	Comparaison des fonctions puissance et exponentielle	181
8.9	Exercices	182

9 Fonctions hyperboliques	189
9.1 Définition des fonctions hyperboliques	190
9.2 Étude de la fonction cosinus hyperbolique	193
9.3 Étude de la fonction sinus hyperbolique	195
9.4 Étude de la fonction tangente hyperbolique	197
9.5 Étude de la fonction cotangente hyperbolique	197
9.6 Analogie entre fonctions circulaires et hyperboliques	198
9.7 « Trigonométrie » hyperbolique	199
9.8 Linéarisation des polynômes en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$	202
9.9 Existence des fonctions réciproques	203
9.10 Fonction argument cosinus hyperbolique	203
9.11 Fonction argument sinus hyperbolique	205
9.12 Fonction argument tangente hyperbolique	206
9.13 Fonction argument cotangente hyperbolique	206
9.14 Recherche de primitives	207
9.15 Dérivées et différentielles usuelles	208
9.16 Exercices	209
10 Développements limités	215
10.1 Utilité des développements limités	216
10.2 Définitions	216
10.3 Unicité d'un développement limité	217
10.4 Existence d'un développement limité	218
10.5 Développements limités des fonctions usuelles	219
10.6 Théorèmes fondamentaux	219
10.7 Fonctions équivalentes	226
10.8 Recherche de partie principale	226
10.9 Recherche de limites	227
10.10 Exercices	228
11 Techniques de recherche de primitives	231
11.1 Introduction	232
11.2 Définition de la primitive d'une fonction	233
11.3 Primitives des fonctions usuelles	233
11.4 Primitives des fonctions trigonométriques	233
11.5 Primitives des fonctions hyperboliques	234
11.6 Technique de l'intégration par parties	234
11.7 Technique du changement de variables	236
11.8 Primitives de fonctions composées	237
11.9 Primitives de polynômes particuliers	238
11.10 Primitives des fractions rationnelles	239
11.11 Intégrales abéliennes	248
11.12 Méthodes particulières d'intégration	251
11.13 Intégration par récurrence : formule de Wallis	257
11.14 Exercices	258
12 Intégrales généralisées	261
12.1 Introduction	262
12.2 Intégrale d'une fonction non bornée	263
12.3 Critères de convergence	263
12.4 Convergence absolue	264
12.5 Fonction intégrable sur un intervalle non borné	265
12.6 Critère de convergence – Critère de Cauchy	266
12.7 Théorèmes fondamentaux de convergence	267
12.8 Formule de la moyenne	270
12.9 Critère d'Abel pour les intégrales généralisées	270

13 Suites numériques réelles	273
13.1 Suite numérique quelconque	274
13.2 Suite numérique de nombres réels	274
13.3 Espace vectoriel des suites numériques	276
13.4 Algèbre des suites numériques convergentes	276
13.5 Opérations sur les suites numériques divergentes	279
13.6 Théorèmes fondamentaux	279
13.7 Suites réelles monotones	280
13.8 Suite arithmétique	284
13.9 Suite géométrique	285
13.10 Applications des suites numériques	288
13.11 Suites récurrentes – Théorème du point fixe	288
13.12 Exercices	291
14 Équations différentielles	299
14.1 Introduction	300
14.2 Équation différentielle – Courbe intégrale	301
14.3 Équations différentielles du premier ordre	301
14.4 Équations différentielles homogènes	302
14.5 Équations différentielles linéaires du 1 ^o ordre	304
14.6 Équations différentielles du deuxième ordre	309
14.7 Exercices	319
15 Fonctions de plusieurs variables	329
15.1 Rappel – Espace vectoriel	330
15.2 Espace vectoriel normé	331
15.3 Espace vectoriel normé complet	334
15.4 Fonctions vectorielles d’une variable réelle	334
15.5 Fonctions complexes d’une variable réelle	335
15.6 Fonctions de plusieurs variables réelles	336
15.7 Fonctions de deux variables réelles	337
15.8 Théorème des accroissements finis	344
15.9 Formule de Taylor-Lagrange	344
15.10 Extremum d’une fonction de deux variables	345
15.11 Applications aux fonctions homogènes	346
15.12 Fonction implicite	347
15.13 Exercices	349
16 Fonctions différentiables	355
16.1 Fonctions d’une variable réelle	356
16.2 Fonctions de plusieurs variables	359
16.3 Forme différentielle exacte	361
16.4 Application au calcul d’erreur	363
16.5 Exercices	364
A Compléments sur les ensembles	369
A.1 Notions sur la puissance des ensembles	370
A.2 Cardinal ou puissance d’un ensemble	371
A.3 Nombres algébriques et nombres transcendants	374
B Formulaire mathématique	377
B.1 Rappels de trigonométrie	378
B.2 Identités remarquables	383
B.3 Résolution d’un système linéaire	383

C	Réflexions sur les mathématiques	385
C.1	L'idée de perfection logique	386
C.2	Les langages formalisés	386
C.3	Axiomes – Schémas – Théorèmes	386
C.4	Théorie de la démonstration	387
C.5	Prédicats	389
C.6	Interprétation des formules	390
D	Introduction à la logique	393
D.1	Avant-propos	394
D.2	Formalisation de la logique – Vocabulaire	395
D.3	Méthodes de déduction	400
E	Notions de probabilités	403
E.1	Introduction	404
E.2	Probabilités	404
E.3	Espace probabilisable	406
E.4	Espaces probabilisés discrets	408
F	Algèbre de Boole	415
F.1	Introduction	416
F.2	Définition	416
F.3	Propriétés fondamentales	417
F.4	Exemples d'algèbres de Boole	418
F.5	Relation binaire dans une algèbre de Boole	419
F.6	Fonctions booléennes	421
F.7	Simplifications des expressions booléennes	423
F.8	Exercices	426
G	Polynômes et fractions rationnelles	429
G.1	Polynômes de degré n	430
G.2	Algèbre des polynômes de degré n	430
G.3	Division des polynômes	430
G.4	Fraction rationnelle dans \mathbb{R}	431
H	Lexique	433
H.1	Lettres de l'alphabet grec utilisées dans cet ouvrage	434
H.2	Table des fonctions	434
H.3	Table des symboles mathématiques utilisés	435
I	Biographies	437

CET OUVRAGE s'adresse tout particulièrement aux étudiants scientifiques du 1^{er} cycle d'université et aux élèves d'école d'ingénieur, de la formation continue ou d'IUT.

Sa rédaction, tant dans son contenu que dans sa structure, est inspirée par le profil et les besoins en mathématiques de l'étudiant et du futur ingénieur.

L'auteur s'est fixé pour objectif de donner aux étudiants les connaissances de base qui doivent leur permettre d'aborder des notions plus complexes.

Avec au moins 120 exercices corrigés et plus de 330 exemples commentés répartis en seize chapitres et sept annexes, cet ouvrage fait la synthèse d'une vingtaine d'années d'enseignement au Conservatoire National des Arts et Métiers de Toulouse.

Après une présentation à la fois rigoureuse et rapide des notions fondamentales dans les chapitres 1 et 2, afin de se familiariser avec le vocabulaire mathématique, nous entrons progressivement dans des notions plus complexes.

L'auteur a conçu un livre compagnon, présentant les notions essentielles le plus clairement possible, agrémentées d'exemples, de remarques et d'analogies afin d'en faciliter la compréhension. Les démonstrations qui y figurent sont importantes d'un point de vue pédagogique, et pour un entraînement à la rigueur mathématique.

Ces chapitres doivent être abordés avec le plus grand soin. En effet, s'il n'est pas forcément utile d'apprendre certains résultats « par coeur », il n'en reste pas moins important pour un futur ingénieur ou un étudiant scientifique de connaître les résultats fondamentaux, en vue de certaines applications, et pour un étudiant en formation continue d'acquérir une certaine rigueur de raisonnement.

www.cephadues.com

Réf. : 628

I.S.B.N. : 2-85428-628-6



9 782854 286281