

HOCHART · SCIUTO

PRÉPA MPSI/PCSI

# ALGÈBRE ANALYSE GÉOMETRIE

TOUT LE PROGRAMME DE PREMIÈRE ANNÉE  
EN EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS



VUIBERT

M793

040325  
⑨

# ALGÈBRE ANALYSE GÉOMÉTRIE

PRÉPA MPSI/PCSI  
EXERCICES & PROBLÈMES CORRIGÉS



**MAX HOCHART**

AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES  
PROFESSEUR EN CLASSE PRÉPARATOIRE MPSI AU LYCÉE BLAISE PASCAL,  
CLERMONT-FERRAND

**GILLES SCIUTO**

AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES  
PROFESSEUR EN CLASSE PRÉPARATOIRE PC AU LYCÉE SAINT-LOUIS, PARIS

NOUVELLE ÉDITION REFONDUE

VUIBERT

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>I - PREMIÈRE PÉRIODE</b>	<b>5</b>
1. Inégalité de Chebyshev . . . . .	5
2. Nombre de surjections de $[[1, n]]$ vers $[[1, p]]$ . . . . .	11
3. Similitudes du plan (I) . . . . .	16
4. Similitudes du plan (II) . . . . .	26
5. Transformations de Koebe . . . . .	31
6. Géométrie élémentaire . . . . .	38
7. Equations différentielles . . . . .	48
8. Conchoïdes et podaires . . . . .	54
9. Résolution géométrique d'une équation de Pell Fermat . . . . .	64
<b>II - RÉELS ET SUITES</b>	<b>73</b>
10. Autour de la suite de Fibonacci . . . . .	73
11. Lemme de Césaro . . . . .	83
12. La série harmonique . . . . .	93
13. Fractions égyptiennes . . . . .	105
<b>III - CONTINUITÉ</b>	<b>116</b>
14. Etude d'une équation fonctionnelle (I) . . . . .	116
15. Etude d'une équation fonctionnelle (II) . . . . .	121
16. Fonctions absolument continues . . . . .	128
<b>IV - DERIVATION</b>	<b>133</b>
17. Logarithme de Briggs . . . . .	133
18. Utilisation de la convexité en géométrie . . . . .	138
19. Etude des suites itérées . . . . .	144
20. Inégalité de Carleman . . . . .	154
21. Nombre d'involutions d'un ensemble fini . . . . .	163
<b>V - INTEGRATION</b>	<b>172</b>
22. Une inégalité . . . . .	172
23. Intégrales de Wallis . . . . .	176
24. Irrationalité . . . . .	184
25. Inégalité de Young . . . . .	191

26. Polynômes de Bernoulli et calcul des $\zeta(2m)$ . . . . .	198
27. Inégalité isopérimétrique . . . . .	207
28. Loi de Benford . . . . .	214
<b>VI - GROUPES, ANNEAUX ET ARITHMÉTIQUE</b>	<b>227</b>
29. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ . . . . .	227
30. Caractères d'un groupe abélien fini . . . . .	238
31. Equation de Pell Fermat . . . . .	247
32. Une version faible du théorème des nombres premiers . . . . .	263
<b>VII - POLYNOMES</b>	<b>272</b>
33. Polynômes trigonométriques à valeurs positives . . . . .	272
34. Transformée de Fourier discrète . . . . .	278
<b>VIII - ALGÈBRE LINÉAIRE</b>	<b>290</b>
35. Polynômes de Hilbert . . . . .	290
36. Idéaux de $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	299
37. Moyenne spatiale . . . . .	308
38. Puissances de matrices . . . . .	313
39. Moyenne de Césaro des puissances d'une matrice stochastique . . . . .	324
40. Trace d'une matrice . . . . .	332
41. Matrices d'ordre fini à coefficients entiers . . . . .	342
<b>IX - ESPACES EUCLIDIENS</b>	<b>351</b>
42. Simplicité de $SO(3)$ . . . . .	351
43. Polynômes de Legendre . . . . .	355
44. Polynômes orthogonaux . . . . .	366
<b>X - FONCTIONS DE DEUX VARIABLES REELLES</b>	<b>375</b>
45. Applications homogènes . . . . .	375

NOUVELLE ÉDITION REFONDUE

MAX HOCHART  
GILLES SCIUTO  
ALGÈBRE ANALYSE  
GÉOMÉTRIE

EXERCICES & PROBLÈMES CORRIGÉS · PRÉPA MPSI/PCSI

Conforme aux nouveaux programmes, cette nouvelle édition comporte 45 sujets classés par ordre croissant de difficulté. Le niveau et les prérequis sont toujours indiqués et les corrigés très détaillés. Comme aux concours, certaines questions font appel au logiciel MAPLE.

PREMIÈRE PÉRIODE

Inégalité de Chebyshev • Nombre de surjections de  $\{1, n\}$  vers  $\{1, p\}$  • Similitudes du plan (I) et (II)  
Transformations de Koebe • Géométrie élémentaire • Équations différentielles  
Conchoïdes et podaires • Résolution géométrique d'une équation de Pell Fermat

RÉELS ET SUITES

Autour de la suite de Fibonacci • Lemme de Césaro • Série harmonique • Fractions égyptiennes

CONTINUITÉ

Équations fonctionnelles (I) et (II) • Fonctions absolument continues

DÉRIVATION

Logarithme de Briggs • Utilisation de la convexité en géométrie • Étude des suites itérées  
Inégalité de Carleman • Nombre d'involutions d'un ensemble fini

INTÉGRATION

Une inégalité • Intégrales de Wallis • Irrationalité • Inégalité de Young  
Polynômes de Bernoulli et calcul de  $\zeta(2m)$  • Inégalité isopérimétrique • Loi de Benford

GROUPES, ANNEAUX ET ARITHMÉTIQUE

Sous-groupes de  $(\mathbf{R}, +)$  et  $(\mathbf{C}^*, \times)$  • Caractère d'un groupe abélien fini  
Équation de Pell Fermat • Une version faible du théorème des nombres premiers

POLYNÔMES

Polynômes trigonométriques • Transformée de Fourier discrète

ALGÈBRE LINÉAIRE

Polynômes de Hilbert • Idéaux de  $L(E)$  • Moyenne spatiale • Puissances de matrices  
Moyenne de Césaro des puissances d'une matrice stochastique • Trace d'une matrice  
Matrices d'ordre fini à coefficients entiers

ESPACES EUCLIDIENS

Simplicité de  $SO(3)$  • Polynômes de Legendre • Polynômes orthogonaux

FONCTION DE DEUX VARIABLES RÉELLES

Applications homogènes



WWW.VUIBERT.FR

ISBN 978-2-7117-2082-8

