

Pratiques mathématiques

1^{er} cycle universitaire
& classes prépa

ANALYSE

*La convergence
vue par les problèmes*

Roland Groux
Philippe Soulat

Cépaduès
- éditions -

040021
②

M 790



ANALYSE

La convergence vue par les problèmes

Roland GROUX

Professeur Agrégé en classes préparatoires PTSI au lycée Rouvière

Philippe SOULAT

Professeur Agrégé au lycée Rouvière

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

111, rue Nicolas-Vauquelin

31100 TOULOUSE – France

Tél. : 05 61 40 57 36 – Fax : 05 61 41 79 89

(de l'étranger) + 33 5 61 40 57 36 – Fax : + 33 5 61 41 79 89

www.cepades.com

Courriel : cepades@cepades.com

SOMMAIRE.

1. Algorithmes : Les lignes de force. (page 7)

2. Doubler l'indice.

- 2.1 Le principe de base. (page 11)
- 2.2 Algorithme circulaire universel. (page 12)
- 2.3 De la racine carrée au logarithme. (page 14)
- 2.4 Suite de Schwab. (page 16)
- 2.5 Décomposition de racine en produit infini. (page 19)

3. Algorithmes de changement de signe.

- 3.1 Dichotomie. (page 23)
- 3.2 Algorithme élémentaire pour Arc cos. (page 24)
- 3.3 Approximation des logarithmes. (page 25)

4. Algorithmes de type Briggs.

- 4.1 Approche des racines carrées. (page 27)
- 4.2 Algorithme C.O.R.D.I.C pour la fonction logarithme. (page 29)
- 4.3 Algorithme C.O.R.D.I.C pour l'exponentielle. (page 33)
- 4.4 Algorithme de Briggs. (page 35)

5. Approximation des racines d'un polynôme.

- 5.1 Principes généraux. (page 39)
- 5.2 Des carrés évanouissants. (page 41)
- 5.3 Equation de Fermat élémentaire. (page 42)
- 5.4 Approximations par divisions Euclidiennes. (page 43)
- 5.5 Résolutions approchées et exactes. (page 44)
- 5.6 Algorithme de Graeffe. (page 46)
- 5.7 Variations sur l'algorithme de Graeffe. (page 48)

6. Schéma du point fixe.

- 6.1 Applications contractantes. (page 51)

- 6.2 Méthodes d'interpolation. (page 58)
- 6.3 Méthode de la sécante. (page 61)
- 6.4 Méthode de la corde. (page 62)
- 6.5 Méthode de Newton. (page 64)
- 6.6 Méthode de Steffensen. (page 65)
- 6.7 Méthode de Schröder. (page 66)
- 6.8 Convergence rapide vers les racines carrées. (page 67)
- 6.9 Méthode de Lagrange. (page 68)
- 6.10 Variante de la méthode de Lagrange pour les racines. (page 70)
- 6.11 Convergence vers un point fixe par barycentrage. (page 71)
- 6.12 Méthode du petit paramètre. (page 72)

7. Accélération de la convergence.

- 7.1 Introduction. (page 77)
- 7.2 La méthode d'Aitken-Romberg. (page 78)
- 7.3 La formule d'Aitken. (page 82)
- 7.4 La méthode de Steffensen. (page 86)
- 7.5 Accélération élémentaire d'une convergence. (page 88)
- 7.6 Variantes de la méthode d'Aitken. (page 89)
- 7.7 Théon de Smyrne, Bombelli et Héron d'Alexandrie. (page 93)
- 7.8 Transformation d'Abel. (page 96)
- 7.9 Fonction gamma incomplète. (page 98)

8. Fractions continues.

- 8.1 Principes généraux. (page 101)
- 8.2 Développements en fractions continues. (page 102)
- 8.3 Théorème de Pringsheim. (page 105)
- 8.4 Approximations de Padé de la tangente hyperbolique. (page 107)
- 8.5 Développements de Lambert et d'Euler. (page 109)
- 8.6 Equation de Fermat. (page 110)

9. Irrationalité.

- 9.1 Généralités. (page 113)
- 9.2 Irrationalité de e . (page 117)
- 9.3 Irrationalité de π . (page 118)
- 9.4 Irrationalité de $\tan(1)$. (page 119)
- 9.5 Irrationalité des tangentes des inverses d'entiers. (page 121)

- 9.6 Irrationalité de π^2 . (page 122)
- 9.7 Cosinus irrationnels. (page 123)
- 9.8 Séries d'Engel. (page 124)
- 9.9 Nombre de Liouville. (page 126)
- 9.10 Transcendance de e . (page 127)

10. Polynômes classiques.

- 10.1 Polynômes de Lagrange. (page 129)
- 10.2 Polynômes Splines cubiques. (page 136)
- 10.3 Polynômes orthogonaux. (page 143)
- 10.4 Polynômes de Tchebychev. (page 159)
- 10.5 Polynômes d'Euler. (page 162)
- 10.6 Polynômes de Bernstein. (page 163)
- 10.7 Polynômes factoriels. (page 164)
- 10.8 Polynômes d'Hurwitz. (page 165)

11. Thèmes variés.

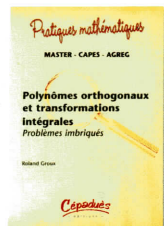
- 11.1 Exponentielle limite de puissances. (page 169)
- 11.2 Approches rationnelles des fonctions usuelles. (page 171)
- 11.3 Deux suites pour Pi et logarithme de 2. (page 174)
- 11.4 Suites à convergence lente. (page 176)
- 11.5 Convergente lente vers racine carrée. (page 177)
- 11.6 Une suite à convergence très lente. (page 179)
- 11.7 Moyenne arithmético-géométrique de Gauss. (page 180)
- 11.8 Développement Eulérien du sinus. (page 182)
- 11.9 Du sinus Eulérien à Stirling. (page 184)
- 11.10 Intégrales de Wallis, Gauss, formule de Stirling. (page 185)
- 11.11 La fonction gamma. (page 189)
- 11.12 Intégrales Eulériennes. (page 192)

12. Problèmes divers. (page 195)

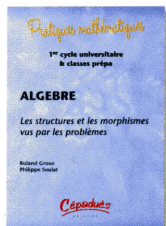
13. L'essentiel du cours. (page 237)

14. L'outil MAPLE. (page 279)

Dans la même série



Réf. 834



Réf. 83300

Chez le même éditeur

- Bien débiter en mathématiques : probabilités discrètes

J.-M. et R. Morvan

- Cours d'analyse fonctionnelle et complexe

Y. Caumel

- Invitation à l'algèbre

A. Jeanneret, D. Lines

www.cepadues.com

Ce manuel s'adresse aux élèves de classes préparatoires aux grandes écoles, aux étudiants en premier cycle d'Université et aux futurs enseignants de mathématiques. Il est conçu pour aider efficacement ces candidats à affronter les épreuves d'Analyse de leurs examens et concours. Chaque chapitre est agrémenté de pages historiques, qui replacent les résultats énoncés dans leur contexte.

La méthode choisie est la présentation d'un vaste choix de problèmes d'entraînement, appuyée par une réflexion approfondie sur les principes fondamentaux de l'Analyse. Les corrigés détaillés sont accessibles au format PDF sur le cédérom joint à cet ouvrage. On trouvera également un résumé des définitions et résultats basiques de cette discipline ainsi qu'un aide-mémoire MAPLE.

Insister sur les points clés de la théorie permet de saisir les lignes de force dans les divers sujets proposés (regroupés en familles), ce qui clarifie la vision des thèmes essentiels liés à la convergence.

La structure adoptée permet aussi un accès rapide et direct à des concepts spécifiques, avec un engagement théorique minimum et une illustration abondante, souvent inscrite dans une perspective historique. On peut ainsi découvrir comment fonctionnent les calculatrices, prouver une irrationalité ou ce qu'est une accélération de convergence. Dans cette optique l'ouvrage séduira donc également toute personne curieuse de la mathématique, qui y trouvera nombre de méthodes intéressantes.

Les auteurs ont une longue pratique pédagogique dans des structures diverses (Lycée, CPGE, Université, IUT, formation continue, préparation au CAPES).

Réf. 82800

ISBN : 978.2.85428.828.5



9 782854 288285