

# CALCUL INTÉGRAL



LUC AMYOTTE



M781

039994  
Ⓟ

# CALCUL INTÉGRAL



**LUC AMYOTTE**

Professeur de mathématiques  
Cégep de Drummondville

**ERPI**  
ÉDITIONS DU RENOUVEAU PÉDAGOGIQUE INC.

5757, RUE CYPHOT, SAINT-LAURENT (QUÉBEC) H4S 1R3  
TÉLÉPHONE: (514) 334-2690  
erpidm@erpi.com

TÉLÉCOPIEUR: (514) 334-4720  
[www.erpi.com](http://www.erpi.com)

# TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos .....	VII
Guide visuel .....	XI

## CHAPITRE 1

<b>L'INTÉGRALE DÉFINIE</b> .....	2
1.1 Problèmes à l'origine du calcul différentiel et intégral .....	6
Un peu d'histoire .....	7
1.2 Notation sigma .....	7
Des mots et des symboles .....	8
1.3 Propriétés de la notation sigma .....	9
Un peu d'histoire .....	15
Des mots et des symboles .....	16
1.4 Approximation à l'aide d'une somme .....	17
Un peu d'histoire .....	28
1.5 Somme de Riemann et intégrale définie .....	28
1.6 Propriétés des intégrales définies .....	32
1.7 Théorème fondamental du calcul intégral .....	35
Des mots et des symboles .....	38
1.8 Retour sur la notation de l'intégrale .....	39
1.9 Primitives élémentaires .....	40
1.10 Approche plus formelle du théorème fondamental à l'aide des théorèmes classiques de l'analyse mathématique .....	44
Résumé .....	49
Mots clés .....	50
Réseau de concepts .....	50
Exercices récapitulatifs .....	51

## CHAPITRE 2

<b>TECHNIQUES D'INTÉGRATION</b> .....	56
2.1 Primitive et intégrale indéfinie .....	60
Des mots et des symboles .....	60
2.2 Formules d'intégration de base .....	61
2.3 Changement de variable et autres astuces .....	67
2.3.1 Intégration d'une fonction rationnelle impropre .....	67
2.3.2 Changement de variable dans une intégrale .....	68
2.3.3 Intégration de fonctions paires et de fonctions impaires .....	77
Des mots et des symboles .....	78
2.3.4 Complétion du carré .....	80

2.4	Intégration par parties	82
	Un peu d'histoire	87
2.5	Intégration de fonctions trigonométriques	88
2.5.1	Intégrales du type $\int \cos mx \cos nx \, dx$ , $\int \sin mx \sin nx \, dx$ ou $\int \sin mx \cos nx \, dx$	90
2.5.2	Intégrales du type $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$	90
2.5.3	Intégrales comportant des sécantes, des cosécantes, des tangentes ou des cotangentes	93
2.5.4	Combinaison de stratégies	95
2.6	Intégration par substitution trigonométrique	95
2.7	Intégration d'expressions comportant des fonctions quadratiques	102
2.8	Intégration d'une fonction rationnelle par décomposition en fractions partielles	103
2.9	Intégration numérique	113
2.9.1	Méthode des trapèzes	113
2.9.2	Erreur maximale d'approximation avec la méthode des trapèzes	115
	Résumé	116
	Mots clés	118
	Réseau de concepts	118
	Exercices récapitulatifs	119
	Examen blanc	126

## CHAPITRE 3

	APPLICATIONS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE	128
3.1	Calcul de l'aire d'une surface plane	133
3.1.1	Aire de la surface comprise entre deux courbes	133
	Un peu d'histoire	142
3.1.2	Surplus des consommateurs et surplus des producteurs	142
3.1.3	Courbe de Lorenz et indice de Gini	145
3.2	Calcul de la valeur moyenne d'une fonction	147
3.3	Calcul du volume d'un solide	149
3.3.1	Méthode des tranches	150
3.3.2	Méthode des disques	155
3.3.3	Méthode des disques troués	159
3.3.4	Méthode des tubes (ou méthode des coquilles cylindriques)	163
3.4	Calcul de la longueur d'un arc d'une courbe plane	167
3.5	Calcul de l'aire d'une surface de révolution	171
	Résumé	176
	Mots clés	177
	Réseau de concepts	177
	Exercices récapitulatifs	178

## CHAPITRE 4

	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	190
4.1	Importance des équations différentielles	194
4.2	Typologie des équations différentielles	196

4.3	Solution d'une équation différentielle .....	198
4.4	Équations différentielles à variables séparables .....	199
4.4.1	Méthode de résolution d'une équation différentielle à variables séparables .....	200
4.4.2	Applications des équations différentielles à variables séparables .....	200
4.4.3	Équations différentielles à variables séparables et analyse marginale .....	204
4.5	Équations différentielles d'ordre supérieur à 1 de la forme $y^{(n)} = f(x)$ .....	205
	Résumé .....	210
	Mots clés .....	210
	Réseau de concepts .....	211
	Exercices récapitulatifs .....	211
	Examen blanc .....	220

## CHAPITRE 5

### RÈGLE DE L'HOSPITAL ET INTÉGRALES IMPROPRES .. 222

5.1	Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ .....	226
	Un peu d'histoire .....	234
5.2	Formes indéterminées du type $0 \cdot \infty$ ou $\infty - \infty$ .....	234
5.3	Formes indéterminées du type $0^0$ , $\infty^0$ ou $1^\infty$ .....	237
5.4	Intégrales impropres .....	241
5.5	Intégrales impropres avec au moins une borne d'intégration infinie .....	242
	Un peu d'histoire .....	247
5.6	Intégrales impropres en probabilité .....	248
5.7	Intégrales impropres en mathématiques financières .....	251
5.8	Intégrales impropres dont l'intégrande prend une valeur infinie en un point de l'intervalle $[a, b]$ .....	252
	Résumé .....	254
	Mots clés .....	256
	Réseau de concepts .....	256
	Exercices récapitulatifs .....	257

## CHAPITRE 6

### SUITES ET SÉRIES .. 262

6.1	Approximations polynomiales .....	266
6.2	Suites de nombres réels .....	268
	Un peu d'histoire .....	272
6.3	Typologie des suites .....	273
6.4	Terminologie de base des séries .....	281
6.5	Théorèmes de base sur les séries .....	285
6.6	Quelques séries importantes .....	286
6.6.1	Série arithmétique .....	287
6.6.2	Série géométrique .....	287
	Un peu d'histoire .....	289
6.6.3	Série harmonique .....	290
6.6.4	Série de Riemann .....	291

<b>6.7 Critères de convergence de séries à termes positifs</b> .....	294
<b>6.8 Convergence absolue et convergence conditionnelle</b> .....	303
<b>6.9 Séries entières</b> .....	307
<b>6.10 Séries de Taylor et de Maclaurin</b> .....	312
<b>Résumé</b> .....	318
<b>Mots clés</b> .....	321
<b>Réseau de concepts</b> .....	322
<b>Exercices récapitulatifs</b> .....	323
<b>Examen blanc</b> .....	327
<b>Réponses des exercices récapitulatifs</b> .....	329
<b>Glossaire</b> .....	427
<b>Bibliographie</b> .....	439
<b>Sources des images</b> .....	443
<b>Index</b> .....	445



Cette image évoque le principe fondamental qui est à l'œuvre derrière l'une des applications importantes du calcul intégral: l'évaluation du volume d'un solide obtenue par son découpage en tranches de plus en plus fines et de plus en plus nombreuses.

L'étude du calcul intégral est souvent perçue comme l'apprentissage d'une suite d'algorithmes à appliquer et de procédures à suivre. Cette mauvaise réputation empêche les étudiants d'apprécier à leur juste valeur les subtilités de cette branche sublime des mathématiques et de percevoir toutes les possibilités d'application de cet outil incomparable.

D'où la nécessité d'un ouvrage comme celui-ci, qui a été conçu pour rendre l'apprentissage du calcul intégral plus stimulant grâce à un habile dosage entre le formalisme et l'intuition et entre la théorie et les applications, de façon à faciliter la compréhension des concepts tout en répondant aux exigences de la rigueur mathématique.

- Tous les sujets habituellement couverts dans un cours de calcul intégral y sont abordés, mais pas seulement de manière formelle: ces thèmes sont inscrits dans des contextes et l'accent est mis sur le sens à donner aux calculs effectués et sur les stratégies de résolution de problèmes. L'ouvrage propose non seulement de nombreux exercices qui visent à vérifier la capacité d'appliquer des formules, mais aussi une grande variété de problèmes concrets tirés des sciences de la nature et des sciences humaines pour lesquels le calcul intégral s'avère essentiel. Cette approche met en évidence le potentiel énorme des mathématiques, leur capacité d'être utilisées dans des domaines aussi éloignés que la physique, la psychologie, la biologie et l'économie.

Conçu pour répondre à la fois aux exigences des enseignants et aux besoins des étudiants, ce manuel offre une approche pédagogique novatrice qui facilitera le travail des professeurs et favorisera la réussite des étudiants.

ISBN 978-2-7613-1782-5

