

Manuels de Mathématiques

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

Secondes années

MP, MP*

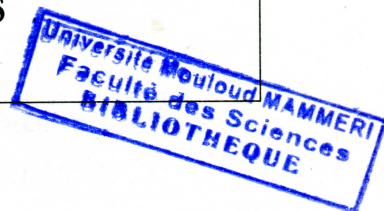
Jean FRANCHINI

Jean-Claude JACQUENS



ellipses

MANUELS
DE MATHÉMATIQUES

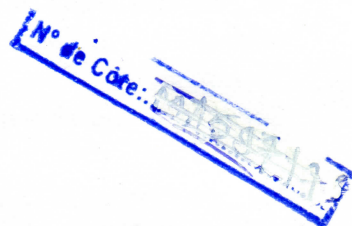


CLASSES DE SECONDE ANNÉE
MP et MP*



ALGÈBRE

Cours / Exercices corrigés / Travaux Dirigés



Jean FRANCHINI
Jean-Claude JACQUENS

Agrégés de Mathématiques
Professeurs en classes préparatoires
de seconde année

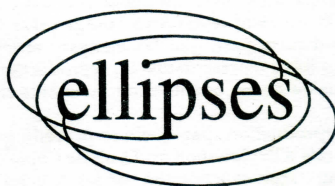


Table des matières

1. ALGÈBRE GÉNÉRALE	9
I. Classes résiduelles	10
A. Congruence modulo n	10
B. Morphisme canonique	11
C. Groupes cycliques	11
II. Groupes ; actions de groupes	12
A. Générations	12
B. Produit de groupes	13
C. Actions de groupes	14
III. Anneaux et corps	17
A. Idéaux d'un anneau commutatif.	17
B. Idéaux de \mathbf{Z} ; anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$	19
C. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$	22
Exercices	24
Travaux dirigés	33
Dévissage du groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	33
Polynômes cyclotomiques	36
Somme de carrés et loi de réciprocité quadratique	40
Corps des quaternions ; théorème des quatre carrés	43
2. ESPACES VECTORIELS	47
I. Familles de vecteurs	47
A. Espace $\mathbf{K}^{(I)}$	47
B. Combinaisons linéaires	47
C. Bases et applications linéaires	48
II. Sommes directes	49
A. Somme	49
B. Définition de la somme directe et premières propriétés	49
C. Décomposition de E en somme directe	51
III. Applications linéaires	52
A. Théorème fondamental	52
B. Dualité	55
C. Trace	61
IV. Calcul matriciel	62
A. Utilisation de matrices élémentaires	62

B. Matrices équivalentes	63
C. Décomposition par blocs	63
D. Opérations élémentaires	64
Exercices	67
Travaux dirigés	83
Espaces vectoriels de matrices non inversibles	83
Codes	84
Théorème de Burnside (MP*)	87
Morphismes continus entre les groupes $GL_n(\mathbf{C})$ et \mathbf{C}^*	90
Groupes multiplicatifs de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$	91
3. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	95
I. Sous-espaces vectoriels stables	95
A. Définitions	95
B. Drapeau	96
II. Polynômes d'endomorphisme	97
A. Généralités	97
B. Théorème de décomposition des noyaux	98
III. Éléments propres	99
A. Cas d'un endomorphisme	99
B. Cas d'une matrice	101
C. Polynôme caractéristique	102
IV. Réduction en dimension finie	107
A. Diagonalisation	107
B. Trigonalisation	112
Exercices	114
Travaux dirigés	130
Matrices cycliques	130
Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ de codimension 1	134
Matrice de Vandermonde	137
Décomposition de Dunford ; applications	139
Suites récurrentes linéaires	143
4. FORMES QUADRATIQUES	145
I. Formes quadratiques	145
A. Formes bilinéaires symétriques	145
B. Formes quadratiques	146
C. Formes bilinéaires symétriques de signe constant	146

D. Réduction d'une forme bilinéaire symétrique en dimension finie	147
II. Espaces préhilbertiens réels	152
A. Produit scalaire	152
B. Orthogonalité	154
C. Projection orthogonale	157
III. Espaces Euclidiens	159
A. Expressions analytiques	159
B. Isomorphisme canonique	160
C. Adjoint d'un endomorphisme	161
D. Automorphismes orthogonaux	166
E. Endomorphismes autoadjoints	169
Exercices	174
Travaux dirigés	186
Matrice et déterminant de Gram	186
Théorème de Courant-Fischer et applications	189
Méthode du gradient conjugué	191
Approximation d'une matrice de rang fixé	192
Conditionnement d'une matrice de Hilbert	197
Norme d'un endomorphisme autoadjoint	203
Formes positives et produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$	208
5. ESPACES VECTORIELS HERMITIENS	213
I. Définitions	213
A. Adjoint d'un endomorphisme	213
B. Endomorphismes normaux	214
II. Théorème spectral	215
Exercices	217
INDEX	224

La collection des Manuels de Mathématiques a pour ambition de donner aux étudiants des classes préparatoires scientifiques un outil d'apprentissage et d'approfondissement des Mathématiques enseignées dans le cadre de la préparation aux concours. L'étudiant a ainsi à portée de main une aide précieuse, tant pour l'apprentissage du cours que pour l'acquisition des méthodes et des techniques de résolution des exercices et des problèmes.

Ce livre est le dernier des trois tomes d'un *Manuel de Mathématiques* écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année MP et MP*. Il est conforme au programme en vigueur depuis septembre 1996.

Il s'efforce de respecter tant l'esprit que la lettre du programme qui a été rédigé de façon à la fois directive pour les enseignants et contraignante pour les examinateurs des concours.

Les deux premiers tomes sont consacrés à l'analyse.



ISBN 2-7298-4896-7