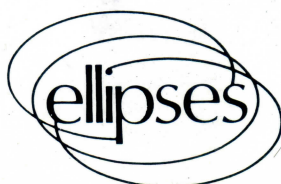
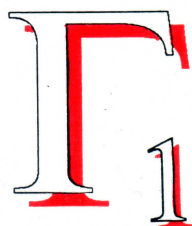


Jacques PICHON

Cours et conseils de travail
Exercices et problèmes corrigés

GROUPES
ESPACES
VECTORIELS

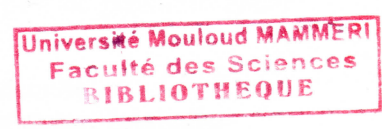
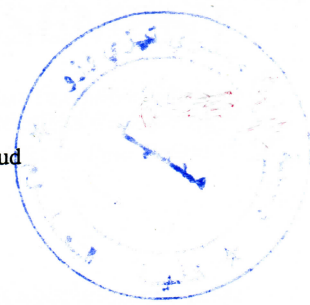


M 764

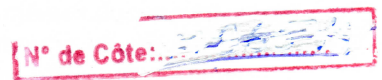
Mathématiques supérieures et première année universitaire
Cours et conseils de travail; exercices et problèmes corrigés

Jacques PICHON

Agrégé de mathématiques
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur en classe de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis (Paris)



GROUPES ESPACES VECTORIELS



Groupes, groupes monogènes
Permutations, transpositions
Groupe opérant sur un ensemble
Espaces vectoriels. Dimension finie
Applications linéaires. Dual . Hyperplans
Sous-variétés affines



EDITEUR DES PREPARATIONS
GRANDES ECOLES - MEDECINE

LA STRUCTURE DE GROUPE

I - GROUPES ET SOUS-GROUPES		7 à 14
1-Définition et exemples		7
Matrices carrées d'ordre 2		
2- Quelques propriétés des groupes		9
Unicité du neutre et du symétrique		
Equation $a * x = b$		
3- Etude des sous-groupes d'un groupe		10
Méthode pratique pour montrer que c'est un sous-groupe		
4- Homomorphismes de groupes		12
Noyau, Ker		
5- Recherche des sous-groupes de certains groupes finis		13
Théorème de Lagrange		
6- Exemples de groupes non commutatifs et de sous-groupes		14
II - SOUS-GROUPE ENGENDRE PAR UNE PARTIE		15 à 22
1- Théorème fondamental		15
2- Sous-groupe engendré par une partie A d'un groupe		16
Groupe monogène		
3- Groupes finis		17
Ordre d'un groupe; ordre d'un élément		
4- Groupes monogènes et groupes cycliques		19
Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; indicateur d'Euler		
III- ETUDE DES PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE FINI		23 à 34
1- Les transpositions		23
Groupe symétrique d'ordre n		
Les transpositions engendrent le groupe symétrique		
2- Permutations particulières		26
Permutations circulaires; cycles		
3- Décomposition d'une permutation		28
4- Un homomorphisme de G_n vers $\{-1,1\}$		31
Signature d'une permutation		
Nombre d'inversions		
IV- GROUPES OPERANT SUR UN ENSEMBLE		35 à 37
1- Définition		35
2- Orbite d'un élément		36

LES ESPACES VECTORIELS

V- STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL		39 à 53
1- Introduction		39
2- Définition		40
3- Quelques exemples d'espaces vectoriels		40
4- Sous-espace vectoriel		42
Caractérisation pratique		
5- Comment montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel		43
6- Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs		43
7- Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel		44
Partie génératrice		
8- Famille libre		46
Vecteurs linéairement indépendants		
9- Comment montrer qu'une famille est libre		48
Familles finies, familles infinies		

10-Famille génératrice	50
11-Comment montrer qu'une famille est génératrice	50
12-Base	52
VI- LES ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE	54 à 62
1-Définition	54
2-Existence de bases dans un espace de dimension finie	54
Algorithme pour extraire une base d'une famille génératrice	
3-Familles libres et familles génératrices en dimension finie	56
4-Dimension d'un espace vectoriel	57
5-Théorème de la base incomplète	60
6-Comment montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie	60
7-En résumé	62
VII- SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS	63 à 71
1-Somme de sous-espaces vectoriels	63
2-Somme directe de sous-espaces vectoriels	64
3-Formules sur les dimensions	65
4-Sous-espaces vectoriels supplémentaires	68
5-Comment montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie	69
Droite vectorielle; plan vectoriel; hyperplan vectoriel	
VIII- APPLICATIONS LINEAIRES	72 à 83
1-Définition	72
$L(E,F)$; $\text{Ker } f$; $\text{Im } f$	
2-Théorème de la dimension	74
3-Comment se donner une application linéaire	76
4-Isomorphismes	77
5-Composition des applications linéaires	79
6-Endomorphismes d'un espace vectoriel	79
$L(E)$	
7-Un exemple d'endomorphisme: les projecteurs	80
8-Endomorphismes dans un espace de dimension finie	81
7 propriétés équivalentes	
Groupe linéaire; $GL(E)$	
9-Rang	82
Rang d'une famille de vecteurs; rang d'une application linéaire	
IX- FORMES LINEAIRES ET HYPERPLANS	84 à 89
1-Définition	84
Dual de E ; E^*	
2-Isomorphisme entre E et E^* en dimension finie	85
3-Equations d'un hyperplan	86
X- SOUS-VARIETE AFFINE D'UN ESPACE VECTORIEL	90 à 94
1-Définition	90
Parallélisme	
2-Dimension d'une sous-variété affine	93

EXERCICES ET PROBLEMES

ENONCES DES EXERCICES	95 à 103
PROBLEME ENS St CLOUD 1970	104
PROBLEME ENSI 1988 (Extrait)	107
PROBLEME INGENIEURS DE MARSEILLE 1981	110
CORRIGES	113 à 158