

# Analyse III

CALCUL INTÉGRAL

Laurent Schwartz

COLLECTION ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Laurent Schwartz

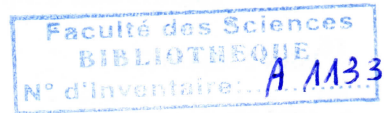
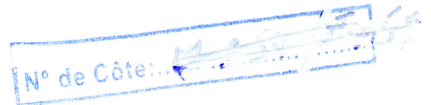
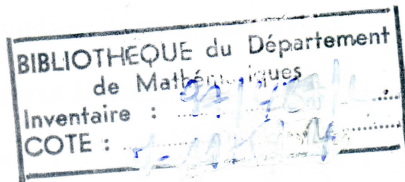


# Analyse III

CALCUL INTÉGRAL



*avec la collaboration de K. Zizi*



1/3

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

## TABLE DES MATIÈRES

### CHAPITRE V. THÉORIES DE LA MESURE

#### §1. *Intégrale de Riemann sur la droite réelle.*

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Intégrale des fonctions en escalier</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>Intégrale supérieure de Riemann d'une fonction positive, bornée, à support compact</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>Fonctions intégrables-Riemann</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>Intégrale d'une fonction intégrable-Riemann</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Exemples de fonctions intégrables-Riemann</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>Calcul de l'intégrale de Riemann par la méthode des sommes de Cauchy-Riemann</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle</b> . . . . .	<b>30</b>

#### §2. *Espaces mesurables - Espaces Mesurés - Mesure extérieure.*

<b>Tribus - Tribu borélienne</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>Clan - Classe monotone</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>Image réciproque d'une tribu</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>Espaces mesurables - Fonctions mesurables</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>Propriétés particulières aux fonctions numériques mesurables</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>Mesures - Espaces mesurés</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>Mesure extérieure</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>Mesure définie par une mesure extérieure (Carathéodory)</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>Mesure extérieure de Hausdorff</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>Dimension au sens de Hausdorff</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>Propriétés vérifiées presque partout</b> . . . . .	<b>66</b>

§3. *Intégrale supérieure associée à une mesure abstraite positive.*

Fonction $\mathcal{A}$ -étagée - Intégrale d'une fonction $\mathcal{A}$ -étagée élémentaire	69
Espace $Sup\mathcal{H}^+$ - Espace $Sup^+(\Omega, \mathcal{A})$ . . . . .	74
Intégrale supérieure d'une fonction positive . . . . .	79
Le théorème de Beppo Levi et le lemme de Fatou . . . . .	80
Mesure extérieure associée . . . . .	83
Caractérisation des ensembles mesurables . . . . .	88
Mesure complète - Complétée d'une mesure . . . . .	93
Cas où le clan $\mathcal{A}$ est une tribu . . . . .	95
Mesure de Lebesgue-Stieltjes sur $\mathbb{R}$ . . . . .	101
Existence d'un ensemble non mesurable . . . . .	113

§4. *Mesures de Radon sur un espace localement compact.*

Mesure de Radon sur un espace compact . . . . .	115
Mesures de Radon sur un espace localement compact . . . . .	122
Mesure de Radon vectorielle . . . . .	129
Support d'une mesure de Radon . . . . .	131
Prolongement d'une mesure de Radon à des fonctions continues de support non compact . . . . .	139
Recollement des morceaux de mesures de Radon . . . . .	140
Mesure de Radon complexe conjuguée . . . . .	141
Mesure de Radon réelle - positive . . . . .	143

§5. *Intégrale supérieure associée à une mesure de Radon positive.*

Intégrale supérieure d'une fonction s.c.i positive, mesure extérieure d'un ouvert . . . . .	153
Intégrale supérieure d'une fonction positive, mesure extérieure d'un ensemble . . . . .	162
Le théorème de Beppo Levi et le lemme de Fatou . . . . .	166
Régularité des mesures de Radon . . . . .	168
Mesure intérieure . . . . .	176
Les 2 intégrations $\sigma$ -finies abstraite et Radon . . . . .	180
Mesures sur les espaces topologiques . . . . .	183

§6. *Fonctions mesurables - Convergence en mesure.*

Limite de suites de fonctions mesurables . . . . .	189
Suites de fonctions boréliennes . . . . .	197
Convergence en mesure d'une suite de fonctions mesurables . . . . .	199
Théorème d'Egoroff . . . . .	202
Mesurabilité au sens de Lusin . . . . .	205

§7. *Fonctions à valeurs vectorielles intégrables.*

Intégrale d'une fonction continue à support compact décomposable	211
Fonction Lebesgue-intégrable - L'espace $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu; F)$ . . . . .	214
Propriétés des fonctions intégrables . . . . .	216
Caractérisation des fonctions intégrables . . . . .	225
Intégrabilité et intégrales des fonctions définies presque partout	228
Théorèmes de convergence dominée de Lebesgue . . . . .	228
Suites et séries de fonctions intégrables . . . . .	234
Intégration sur un ensemble mesurable . . . . .	238
Approximation par des fonctions continues à support compact . . . . .	241
Les fonctions Riemann-intégrables . . . . .	243

§8. *Espaces  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu; F)$ .*

Inégalité de Hölder - Inégalité de Minkowski . . . . .	251
Inégalité de convexité dénombrable généralisée . . . . .	256
Les espaces $\mathcal{L}_F^p(\Omega, \mu)$ . . . . .	257
Relations entre les divers $\mathcal{L}_F^p(\Omega, \mu)$ . . . . .	267
Les espaces $L^p(\Omega, \mu, F)$ : Le théorème de Fischer-Riesz . . . . .	271
Les espaces $\mathcal{L}_F^0(\Omega, \mu)$ et $L_F^0(\Omega, \mu)$ . . . . .	274
Les espaces $\mathcal{L}_F^\infty(\Omega, \mu)$ et $L_F^\infty(\Omega, \mu)$ . . . . .	279
L'équintégrabilité d'ordre $p$ . . . . .	283
Encore un ensemble non mesurable . . . . .	289

## §9. Mesures abstraites à valeurs vectorielles.

Mesure abstraite à valeurs vectorielles . . . . .	293
Mesure à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	295
Variation positive, négative, totale d'une mesure à valeurs $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	299
Borne supérieure d'une famille de mesures abstraites . . . . .	303
Décomposition de Hahn . . . . .	305
Variation totale d'une mesure à valeurs vectorielles . . . . .	308

## §10. Les théorèmes de Lebesgue-Radon-Nikodym - Application à la dualité et au prolongement borélien.

Mesure induite . . . . .	317
Mesure de base $\mu$ . . . . .	322
Mesure dominée - Mesure singulière - Mesures étrangères . . . . .	328
Théorèmes de Radon-Nikodym . . . . .	332
Décomposition de Lebesgue d'une mesure . . . . .	341
Application à la dualité . . . . .	346
Application au prolongement d'une mesure non positive . . . . .	351
Application à l'intégrabilité d'une fonction par rapport à plusieurs mesures . . . . .	361

## §11. Image d'une mesure par une application.

Image d'une mesure abstraite $\sigma$ -finie positive . . . . .	365
La catastrophe de la mesure image . . . . .	368
Image d'une mesure de Radon sur un espace topologique . . . . .	369
Image d'une mesure de Radon sur un espace localement compact . . . . .	372
Cas où $H$ est un homéomorphisme de $X$ sur $Y$ . . . . .	375
Extension lorsque $\mu$ est une mesure de Radon vectorielle de base positive . . . . .	376
Exemples divers d'images directes de mesures . . . . .	377

§12. *Produit d'espaces mesurés - Théorèmes de Fubini.*

Produit d'espaces mesurables . . . . .	379
Existence et unicité de la mesure produit de 2 mesures abstraites	382
Existence et unicité de la mesure produit de 2 mesures de Radon	385
Théorèmes de Fubini . . . . .	389
L'isométrie de $L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2; F)$ sur $L^p(\Omega_1, \mu_1 \otimes \mu_2; L^p(\Omega_2, \mu_2; F))$	402
Extension aux intégrales multiples . . . . .	403
Invariance de la mesure de Lebesgue par les translations et les isométries . . . . .	405
Le théorème de densité de Lebesgue . . . . .	407
§13. <i>Convergence vague d'une suite de mesures.</i>	
Convergence en norme , convergence locale en norme . . . . .	415
Convergence vague . . . . .	416
Convergence vague et convergence uniforme . . . . .	422
Convergence vague d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac . . . . .	423
Convergence étroite d'une suite de mesures de normes finies . . . . .	426
Convergence vague et convergence étroite . . . . .	428
Convergence étroite d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac . . . . .	429
Convergence vague de produits tensoriels . . . . .	439
Ensemble vaguement compact de mesures positives . . . . .	440

Le célèbre *Cours d'analyse* de Laurent Schwartz, est entièrement refondu et mis à jour. Reprenant les plus récents développements du calcul intégral, le mathématicien a entrepris, avec l'assistance de K. Zizi, professeur à l'Université de Reims, d'actualiser et de restructurer l'ensemble de l'ouvrage, qui comprend désormais quatre parties.

**ANALYSE I. THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE.** Les cinq premiers axiomes de la théorie des ensembles. Axiome du choix. Les entiers naturels : l'axiome de l'infini. Relation d'équivalence – Ensemble quotient. Relation d'ordre – Lemme de Zorn. Opérations sur les ensembles infinis. Les nombres ordinaux et cardinaux. Espaces métriques. Espaces topologiques. Fonctions continues. Espaces compacts – Suites et filtres. Propriétés des fonctions continues sur un espace compact. Espaces localement compacts. Espaces connexes. Espaces métriques complets. Théorie élémentaire des espaces vectoriels normés et des espaces de Banach. Séries dans les espaces vectoriels normés. Espaces fonctionnels ; convergence simple et uniforme. Théorie spectrale élémentaire. Produits infinis de nombres ou de fonctions réels ou complexes.

**ANALYSE II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.** Espaces affines. Fonctions réelles d'une variable réelle. Dérivée d'une application d'un espace affine dans un autre. Dérivation des fonctions composées – Applications au changement de variables. Formule des accroissements finis – Application. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Taylor – Maxima et minima. Théorème des fonctions implicites. Variétés différentiables. Maxima et minima liés. Calcul des variations. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales). Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions locales). Prolongement des solutions locales d'une équation différentielle : solution maximale. Majoration *a priori* des solutions d'une équation différentielle. Une condition d'existence de solutions globales sur  $[a, b]$ . Équation différentielle définie par un champ de vecteurs. Résolvante d'une équation différentielle linéaire. Équations linéaires avec second membre. Application de la théorie des équations différentielles linéaires à la continuité et à la dérivabilité de la solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre. Exponentielle d'un opérateur. Construction de l'exponentielle d'un opérateur. Solutions bornées des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

**ANALYSE III. CALCUL INTÉGRAL.** Intégrale de Riemann sur la droite réelle. Espaces mesurés. Intégrale supérieure associée à une mesure positive sur un clan. Mesures de Radon à valeurs scalaires et vectorielles. Intégrale supérieure associée à une mesure de Radon positive. Fonctions mesurables. Fonctions à valeurs vectorielles intégrables. Espaces  $\mathcal{L}^p(W, m, F)$ . Mesures abstraites à valeurs vectorielles – Variation totale d'une mesure vectorielle. Mesure induite. Mesure de base  $m$ . Théorèmes de Radon-Nikodym. Décomposition de Lebesgue d'une mesure. Image d'une mesure par une application. Produit d'espaces mesurés. Théorèmes de Fubini. Invariance de la mesure de Lebesgue par les isométries. Théorème de dérivation de Lebesgue. Convolution des fonctions. Convolution des mesures. Transformation de Fourier des fonctions. Transformation de Fourier des mesures bornées. Convergence vague d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac. Convergence étroite d'une suite de mesures de normes finies. Théorème de Paul Lévy. Fonctions à variation bornée sur la droite. Longueur d'un chemin dans un espace métrique. Fonctions absolument continues et intégrales indéfinies. Critère d'Abel pour la semi-convergence des intégrales impropres. Intégrales multiples sur  $\mathbb{R}^n$ , longueurs, aires, volumes dans les espaces euclidiens affines de dimension finie. Changement de variables dans les intégrales multiples sur  $\mathbb{R}^n$ . Calcul d'intégrales à partir d'intégrales d'hypersurface. Fonctions représentées par des séries. Fonctions représentées par des intégrales. Cas des intégrales impropres convergentes. Application à la divisibilité des fonctions dérivables.

**ANALYSE IV. CALCUL DIFFÉRENTIEL EXTÉRIEUR ET FONCTIONS HOLOMORPHES**

ISBN 2 7056 6163 2



9 782705 661632