Analyse I

THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE

Laurent Schwartz

COLLECTION ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

HERMANN ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Analyse I

Théorie des ensembles et topologie

COLLECTION ENSEIGNEMENT DES SCIENCES, 42

TABLE

CHAPITRE I. THÉORIE DES ENSEMBLES

§1. Quelques éléments de logique classique.

§2. Théorie des ensembles : Les cinq premiers axiomes.

§3. Applications - Famille - Produit d'une famille d'ensembles - L'axiome du Choix.

§4. Les entiers naturels : L'axiome de l'infini.

§5. Ensembles quotients.

§6. Ensembles ordonnés.

§7. Ensembles infinis - Opérations sur les ensembles infinis.

§8. Les nombres ordinaux et cardinaux.

CHAPITRE II. TOPOLOGIE

§1. Espaces métriques.

§4. Espaces métriques et espaces topologiques.

§5. Espaces compacts- Propriétés élémentaires.

§6. Convergences - Limites - Suites et Filtres.

§7. Propriétés des fonctions continues sur un espace compact.

§*8. Espaces localement compacts.*

§*9. Espaces connexes - Espaces connexes par arcs - Espaces localement connexes.*

§*10. Espaces métriques complets.*

§11. Théorie élémentaire des espaces vectoriels normés et des espaces de Banach.

§12. Séries dans les espaces vectoriels normés.

§13. Espaces fonctionnels ; Convergence simple et uniforme.

Laurent Schwartz

Analyse

ANALYSE I. THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE. Les cinq premiers axiomes de la théorie des ensembles. Axiome du choix. Les entiers naturels : l'axiome de l'infini. Relation d'équivalence - Ensemble quotient. Relation d'ordre. Lemme de Zorn. Opérations sur les ensembles infinis. Les nombres ordinaux et cardinaux. Espaces métriques. Espaces topologiques. Fonctions continues. Espaces compacts. Suites et filtres. Propriétés des fonctions continues sur un espace compact. Espaces localement compacts. Espaces connexes. Espaces métriques complets. Théorie élémentaire des espaces vectoriels normés et des espaces de Banach. Séries dans les espaces vectoriels normés. Espaces fonctionnels : convergence simple et uniforme. Théorie spectrale élémentaire. Produits infinis de nombres ou de fonctions réels ou complexes.

ANALYSE II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Espaces affines. Fonctions réelles d'une variable réelle. Dérivée d'une application d'un espace affine dans un autre. Dérivation des fonctions composées. Applications au changement de variables. Formule des accroissements finis. Application. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Taylor. Maxima et minima. Théorème des fonctions implicites. Variétés différentiables. Maxima et minima liés. Calcul des variations. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales). Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales.) Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions locales). Prolongement des solutions locales d'une équations différentielle : solution maximale. Majoration a priori des solutions d'une équation différentielle. Une condition d'existence de solutions globales sur (a,b). Equation différentielle définie par un champ de vecteurs. Résolvante d'une équation différentielle linéaire. Equations linéaires avec second membre. Application de la théorie des équations différentielles linéaires à la continuité et à la dérivabilité de la solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre. Exponentielle d'un opérateur. Construction de l'exponentielle d'un opérateur. Solutions bornées des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

ANALYSE III. CALCUL INTÉGRAL. Intégrale de Riemann sur la droite réelle. Espaces mesurés. Intégrale supérieure associée à une mesure positive sur un clan. Mesures de Radon à valeurs scalaires et vectorielles. Intégrale supérieure associée à une mesure de Radon positive. Fonctions mesurables. Fonctions à valeurs vectorielles intégrables. Espaces £p (W, m, F). Mesures abstraites à valeurs vectorielles - Variation totale d'une mesure vectorielle. Mesure induite. Mesure de base m. Théorèmes de Radon-Nikodym. Décomposition de Lebesgue d'une mesure. Image d'une mesure par une application. Produit d'espaces mesurés. Théorèmes de Fubini. Invariance de la mesure de Lebesgue par les isométries. Théorème de dérivation de Lebesgue.

ANALYSE IV. APPLICATIONS À LA THÉORIE DE LA MESURE. Convolution des fonctions. Convolution des mesures. Transformation de Fourier des fonctions. Transformée de Fourier des mesures bornées. Convergence vague d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac. Convergence étroite d'une suite de mesures de normes finies. Théorème de Paul Lévy. Fonctions à variation bornée sur la droite. Longueur d'un chemin dans un espace métrique. Fonctions absolument continues et intégrales indéfinies. Critère d'Abel pour la semi-convergence des intégrales impropres. Intrégrales multiples sur R^n, longueurs, aires, volumes dans les espaces euclidiens affines de dimension finie. Changement de variable dans les intégrales multiples sur R^n. Calcul d'intégrales à partir d'intégrales d'hypersurface. Fonctions représentées par des séries. Fonctions représentées par des intégrales. Cas des intégrales impropres convergentes. Application à la divisibilité des fonctions dérivables. Formule de Stokes. Intégrale eulérienne. Formule d'Euler-McLaurin.

ISBN 2 7056 6161 1

9 782705 661618

HERMANN ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS