
PRÉPA

H

E

C

PRÉPA

MATHEMATIQUES

classes préparatoires au
Haut Enseignement Commercial
option scientifique – 1ère année
et premiers cycles universitaires

ANALYSE

prépa H.E.C.
Scientifique – 1ère année

Jean GUÉGAND
Jean-Pierre GAVINI

ellipses

Université Mouloud MAMMERI
Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE

M 745

MATHEMATIQUES

classes préparatoires au
Haut Enseignement Commercial
option scientifique – 1ère année
et premiers cycles universitaires



Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE
N° d'inventaire 52.183 3/3

ANALYSE

prépa H.E.C.
Scientifique – 1ère année

N° de Côte: [illegible]

Jean GUÉGAND
Agrégré de l'Université
Professeur en Mathématiques Spéciales M
au lycée Francois 1er (Fontainebleau)

Jean-Pierre GAVINI
Agrégré de l'Université
Professeur en Mathématiques Spéciales C
au lycée Francois 1er (Fontainebleau)



TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : NOMBRES RÉELS, NOTIONS DE TOPOLOGIE.	11
1. Ensemble des nombres réels.	11
2. Structure d'ordre total. Inégalités.	12
3. Intervalles.	14
4. Éléments remarquables d'une partie de \mathbb{R} .	15
5. Valeur absolue.	16
6. Partie entière d'un nombre réel.	17
7. Notions de topologie.	19
8. Ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.	21
<i>Exercices du chapitre 1.</i>	22



1. Notions élémentaires sur les suites et les séries.

CHAPITRE 2 : SUITES NUMÉRIQUES.	26
1. Notion de suite.	26
2. Opérations algébriques sur les suites.	27
3. Exemples fondamentaux	27
A- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	27
B- Suites linéairement récurrentes.	29
4. Suites réelles majorées, minorées. Suites bornées.	32
5. Suites convergentes, divergentes.	34
6. Limites infinies (suites réelles).	38
7. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	42
8. Suites extraites.	43
9. Suites réelles monotones.	45
10. Convergence des suites monotones.	46
11. Suites adjacentes	47
12. Suites équivalentes.	50
13. Domination. Négligeabilité. Croissances comparées.	54
14. Complément : le théorème de Césaro.	58
<i>Exercices du chapitre 2.</i>	60

CHAPITRE 3 : SÉRIES NUMÉRIQUES.	69
1. Généralités sur les séries numériques.	69
Définitions. Opérations sur les séries convergentes.	
2. Premiers exemples :	72
A. Les séries géométriques.	72
B. Séries télescopiques : Le principe des dominos ou de télescopage.	74
3. Séries à termes positifs.	75
A. Premiers critères de convergence.	75
B. Complément : Comparaison logarithmique.	77

C. Complément : comparaison à une série géométrique.	78
D. Les séries de Riemann. Un exemple utile : les séries de Bertrand.	80
4. La convergence absolue.	81
5. Compléments : Groupement de termes. Convergence commutative.	84
<i>Exercices du chapitre 3.</i>	88
II. Fonctions réelles d'une variable réelle	
CHAPITRE 4 : FONCTIONS NUMÉRIQUES.	93
1. Opérations algébriques.	93
2. Relation d'ordre.	94
3. Représentation graphique d'une fonction.	95
4. Fonctions monotones.	96
5. Extrémum d'une fonction.	98
6. Fonctions périodiques.	99
7. Parité et imparité.	101
<i>Exercices du chapitre 4.</i>	102
CHAPITRE 5 :	
LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT	105
0. Introduction.	105
1. Limite : définitions, unicité, notation.	106
2. Continuité.	108
3. Prolongement par continuité.	109
4. Généralisation : Limites à gauche ou à droite.	110
5. Caractérisation de la limite ou de la continuité au moyen des suites.	112
6. Opérations algébriques sur les limites et les fonctions continues.	114
7. Passage à la limite dans une inégalité.	115
8. Composition. Changement de variable.	117
9. Fonctions monotones et limites.	119
10. Fonctions équivalentes.	120
11. Fonctions négligeables.	126
12. Complément : domination.	128
<i>Exercices du chapitre 5.</i>	129
CHAPITRE 6 : ÉTUDE GLOBALE DES FONCTIONS CONTINUES.	135
1. Fonction continue sur un intervalle.	135
2. Le théorème des valeurs intermédiaires.	136
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
3. Théorème des bornes. Image d'un segment par une application continue.	139
4. Continuité et monotonie. Fonctions continues strictement monotones.	142
5. Application au calcul numérique : la méthode par dichotomie partielle.	144
6. Complément : fonctions circulaires réciproques.	145
A. Etude de la fonction Arctangente.	146
B. Etude de la fonction Arcsinus.	148
C. Etude de la fonction Arccosinus.	150

<i>Exercices du chapitre 6.</i>	152
 III. Calcul différentiel et intégral.	
CHAPITRE 7 : DÉRIVATION	160
1. Fonctions dérivables, dérivées. Exemples.	160
2. Interprétations géométriques.	162
3. Résultats généraux.	165
4. Fonction dérivée.	167
5. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables.	169
6. Composition.	171
7. Dérivée d'une fonction réciproque.	172
8. Dérivées successives. Fonctions de classe C^n, C^∞ .	173
<i>Exercices du chapitre 7.</i>	177
 CHAPITRE 8 : THÉORÈME DE ROLLE ET APPLICATIONS	181
1. Le théorème de Rolle et la formule de accroissements finis.	181
A. Le théorème de Rolle et ses applications.	181
Principe de séparation des racines. Théorème de Rolle généralisé.	
B. La formule des accroissements finis et ses applications.	184
2. Applications.	186
A. Sens de variation des fonctions dérivables.	186
B. Fonctions lipchitziennes.	188
C. Théorème de prolongement.	189
3. Compléments : formules de Taylor-Lagrange et de Mac Laurin.	191
<i>Exercices du chapitre 8.</i>	192
 CHAPITRE 9 : ÉTUDE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES ET DES SUITES DÉFINIES PAR ITÉRATION.	197
A-Étude des fonctions numériques.	197
1. Ensemble de définition, domaine d'étude.	197
2. Étude aux bornes, branches infinies.	199
3. Convexité.	204
4. Points d'inflexion.	208
5. Exemple.	210
 B- Suites définies par itération ("$u_{n+1} = f(u_n)$")	211
6. Définitions, exemples.	211
7. Itération par une fonction continue.	213
8. Itération par une fonction monotone.	214
9. Itération par une fonction lipschitzienne.	216
10. Application au calcul numérique.	219
Exemples de méthodes d'approximation d'une équation numérique.	

<i>Exercices du chapitre 9.</i>	223
CALCUL INTÉGRAL.	
CHAPITRE 10 : INTÉGRATION SUR UN SEGMENT.	232
1. Primitives.	232
2. Intégrale des fonctions continues sur un segment. Relation de Chasles. Linéarité.	235
3. Positivité de l'intégrale. Inégalités.	237
4. Approximations de l'intégrale :	240
A. Le théorème de la valeur moyenne , méthode des rectangles.	240
B. Application du calcul intégral au calcul d'aires planes.	245
5. Compléments sur le calcul numérique d'intégrales.	248
A. La méthode des trapèzes.	249
B. La méthode de Simpson.	251
C. Programme en Turbo-Pascal, pour le calcul numérique d'intégrales :	254
CHAPITRE 11 : CALCUL DES INTÉGRALES ET DES PRIMITIVES. INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT.	256
I. CALCUL DES PRIMITIVES ET INTÉGRALES.	256
1. Intégration par parties.	256
2. Changement de variable.	262
3. Calcul des primitives.	265
A. Polynômes et fractions rationnelles	266
B. Polynômes trigonométriques et fractions rationnelles en sin, cos.	270
C. Fractions rationnelles en exp.	273
D. Primitives de fonctions contenant un radical.	274
II. INTÉGRALE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT.	278
4. Fonctions continues par morceaux.	278
5. Intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment.	281
6. Inégalités.	284
A. Positivité de l'intégrale.	284
B. Complément : Inégalité de Cauchy-Schwarz.	288
7. Intégrale fonction de sa borne supérieure. Exemples de fonctions définies par des intégrales.	291
<i>Exercices des chapitres 10 et 11.</i>	295
CHAPITRE 12 : APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL À L'ÉTUDE LOCALE.	302
1. Formules de Taylor.	302
A. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor Lagrange.	302
B. Compléments : quelques développements en série utiles.	305
2. Etude locale : Développements limités, Théorème de Taylor-Young.	306
A. Développements limités. Définition, parties régulière et principale.	306
B. Opérations sur les développements limités.	310
Intégration d'un développement limité.	312

C. Théorème de Taylor-Young.	313
D. Développements limités usuels.	315
3. Applications. Exemples d'étude de fonctions.	318
<i>Exercices du chapitre 12.</i>	324
CHAPITRE 13 : INTÉGRALES IMPROPRES.	333
1. Introduction. Définitions, Propriétés.	333
2. Premier critère de convergence : utilisation des primitives. Les fonctions de Riemann.	339 340
3. Intégration par parties	341
4. Changement de variable.	343
5. Conclusion provisoire...: (limite à l'infini).	345
<i>Exercices du chapitre 13.</i>	346
Index des notations	350
Index	351

Ce cours, en trois volumes (Algèbre, Analyse, Probabilité), a été conçu pour répondre aux souhaits de nombreux étudiants de préparation HEC, d'avoir des livres d'enseignement adaptés à leur programme.

Pour ce deuxième tome, les auteurs ont désiré être très explicites sur les premiers chapitres de cette Analyse, conscients de l'évolution des programmes dans le secondaire. La compréhension de ces notions et techniques de base, concernant notamment le maniement des inégalités et la notion de limite, et une certaine dextérité sont de bon augure pour prétendre être à l'aise en Analyse.

Quelques compléments, bien signalés en tant que tels dans le texte, pourront être passés en première lecture et sont plutôt réservés, déjà, à la seconde année. Les chapitres sont abondamment illustrés d'exercices, certains corrigés, les autres étant laissés à l'indispensable entraînement personnel du lecteur. Certaines questions d'Analyse numérique (suites, fonctions et intégrales) sont accompagnées de programmes écrits en Turbo-Pascal en usage dans ces classes.

Un certain bachotage est sans doute utile, mais on ne peut pas faire illusion bien longtemps en mathématiques sans la compréhension des notions utilisées. La finalité de ce cours est la maîtrise d'objets ou de techniques utiles au-delà même de la réussite à un concours.



9 782729 845971

ISBN 2-7298-4597-6