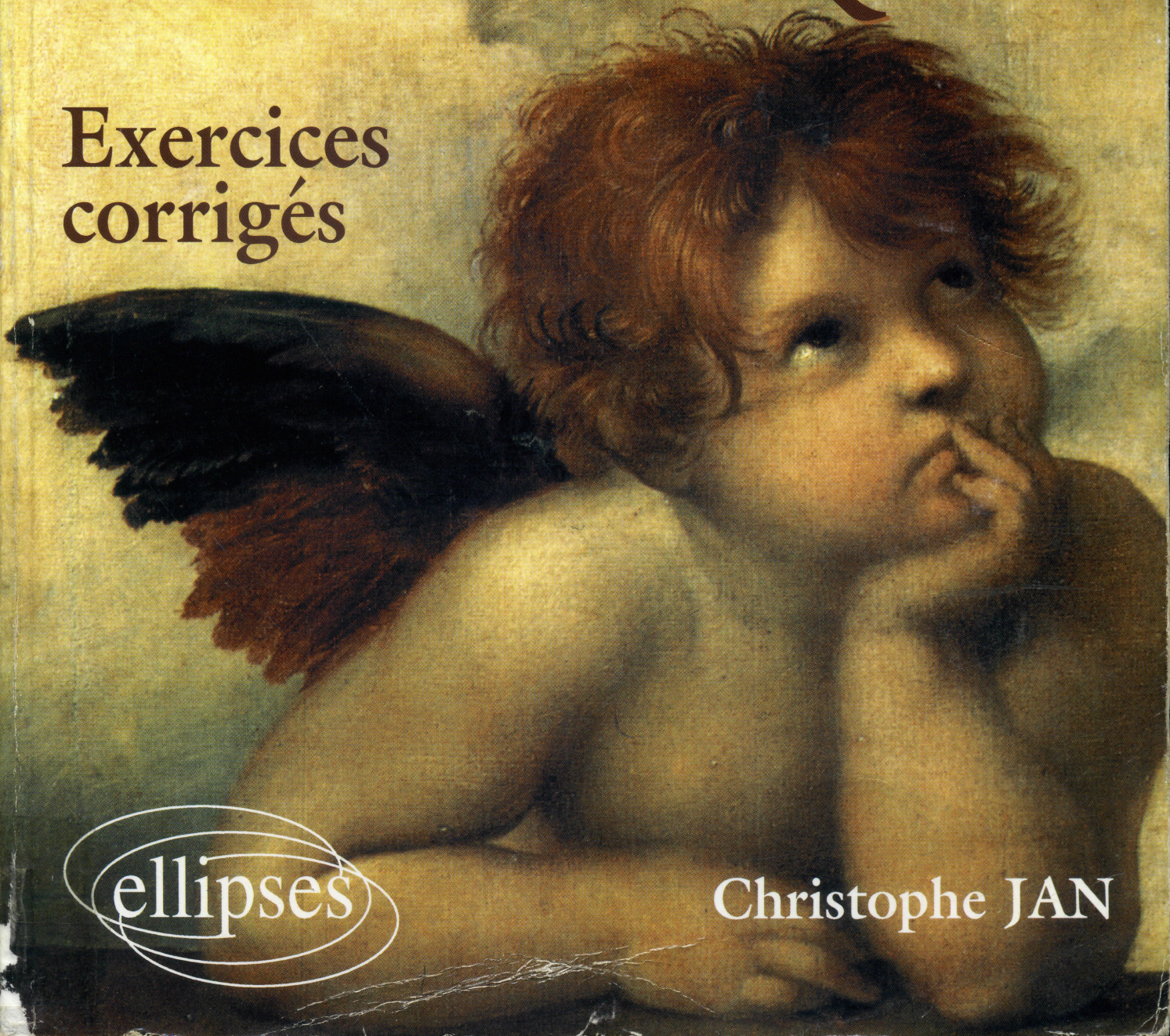


PRÉPA SCIENTIFIQUE • 1<sup>re</sup> & 2<sup>e</sup> année

# Le grand livre des MATHÉMATIQUES

Exercices  
corrigés



ellipses

Christophe JAN

M736

PRÉPA SCIENTIFIQUE • 1<sup>re</sup> & 2<sup>e</sup> année



Université Mouloud MAMMERI  
Faculté des Sciences  
BIBLIOTHEQUE

# Le grand livre des MATHÉMATIQUES

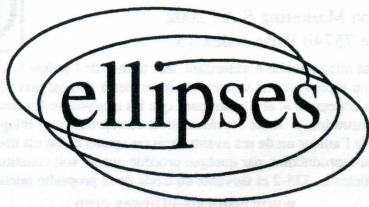
◀ exercices corrigés ▶

Christophe JAN  
Ancien élève de l'ENS Lyon



Faculté des Sciences  
BIBLIOTHEQUE  
N° d'Inventaire. 5.10.78

313



N° de Côte: \_\_\_\_\_

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Programme MPSI (énoncés)</b>	<b>9</b>
1	- Théorie des ensembles, applications . . . . .	10
2	- Relations d'ordre, relations d'équivalence . . . . .	13
3	- Dénombrement sur les ensembles finis, cardinalité . . . . .	16
4	- Groupes, groupes opérant sur un ensemble . . . . .	19
5	- Groupe des permutations d'un ensemble fini . . . . .	23
6	- Anneaux, corps . . . . .	25
7	- Anneau des entiers, nombres premiers, pgcd et ppcm . . . . .	28
8	- Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , congruences . . . . .	33
9	- Polynômes, fractions rationnelles . . . . .	35
10	- Fonctions polynômiales: exercices divers . . . . .	42
11	- Suites de nombres réels ou complexes: étude pratique . . . . .	47
12	- Suites de nombres réels ou complexes: généralités . . . . .	52
13	- Fonctions d'une variable réelle: continuité, convexité . . . . .	58
14	- Fonctions d'une variable réelle: dérivabilité, développements limités . . . . .	63
15	- Espaces vectoriels, dimension, applications linéaires . . . . .	67
16	- Dualité en dimension finie, formes linéaires, hyperplans . . . . .	71
17	- Matrices, polynômes d'endomorphismes et valeurs propres . . . . .	73
18	- Calcul matriciel, déterminant, polynômes de matrices . . . . .	77
19	- Intégration, calcul de primitives, intégrales impropres . . . . .	84
20	- Espaces euclidiens, espaces euclidiens orientés de dimension trois . . . . .	90
21	- Géométrie, géométrie affine . . . . .	94
22	- Équations différentielles: étude quantitative . . . . .	105
<b>II</b>	<b>Programmes MP et MP* (énoncés)</b>	<b>109</b>
23	- Réduction des endomorphismes, diagonalisation . . . . .	110
24	- Séries de nombres réels ou complexes . . . . .	115
25	- Espaces vectoriels normés, espaces métriques . . . . .	121
26	- Espaces topologiques: questions de compacité . . . . .	127
27	- Espaces complets . . . . .	130
28	- Connexité, connexité par arcs . . . . .	135
29	- Espaces hermitiens, signature, algèbre bilinéaire . . . . .	138
30	- Géométrie différentielle . . . . .	142
31	- Séries entières . . . . .	149
32	- Suites et séries d'applications . . . . .	152
33	- Séries de Fourier . . . . .	158

34	- Équations différentielles : étude qualitative . . . . .	162
35	- Fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel . . . . .	166

### III Programme MPSI (solutions) 173

36	- Solutions du chapitre : Théorie des ensembles, applications . . . . .	174
37	- Solutions du chapitre : Relations d'ordre, relations d'équivalence . . . . .	180
38	- Solutions du chapitre : Dénombrement sur les ensembles finis, cardinalité . . . . .	187
39	- Solutions du chapitre : Groupes, groupes opérant sur un ensemble . . . . .	194
40	- Solutions du chapitre : Groupe des permutations d'un ensemble fini . . . . .	206
41	- Solutions du chapitre : Anneaux, corps . . . . .	212
42	- Solutions du chapitre : Anneau des entiers, nombres premiers, pgcd et ppcm . . . . .	222
43	- Solutions du chapitre : Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , congruences . . . . .	242
44	- Solutions du chapitre : Polynômes, fractions rationnelles . . . . .	250
45	- Solutions du chapitre : Fonctions polynômiales : exercices divers . . . . .	291
46	- Solutions du chapitre : Suites de nombres réels ou complexes : étude pratique . . . . .	315
47	- Solutions du chapitre : Suites de nombres réels ou complexes : généralités . . . . .	339
48	- Solutions du chapitre : Fonctions d'une variable réelle : continuité, convexité . . . . .	373
49	- Solutions du chapitre : Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité, développements limités . . . . .	400
50	- Solutions du chapitre : Espaces vectoriels, dimension, applications linéaires . . . . .	424
51	- Solutions du chapitre : Dualité en dimension finie, formes linéaires, hyperplans . . . . .	443
52	- Solutions du chapitre : Matrices, polynômes d'endomorphismes et valeurs propres . . . . .	450
53	- Solutions du chapitre : Calcul matriciel, déterminant, polynômes de matrices . . . . .	474
54	- Solutions du chapitre : Intégration, calcul de primitives, intégrales impropres . . . . .	515
55	- Solutions du chapitre : Espaces euclidiens, espaces euclidiens orientés de dimension trois . . . . .	562
56	- Solutions du chapitre : Géométrie, géométrie affine . . . . .	588
57	- Solutions du chapitre : Équations différentielles : étude quantitative . . . . .	652

### IV Programmes MP et MP\* (solutions) 673

58	- Solutions du chapitre : Réduction des endomorphismes, diagonalisation . . . . .	674
59	- Solutions du chapitre : Séries de nombres réels ou complexes . . . . .	702
60	- Solutions du chapitre : Espaces vectoriels normés, espaces métriques . . . . .	745
61	- Solutions du chapitre : Espaces topologiques : questions de compacité . . . . .	774
62	- Solutions du chapitre : Espaces complets . . . . .	785
63	- Solutions du chapitre : Connexité, connexité par arcs . . . . .	806
64	- Solutions du chapitre : Espaces hermitiens, signature, algèbre bilinéaire . . . . .	816
65	- Solutions du chapitre : Géométrie différentielle . . . . .	836
66	- Solutions du chapitre : Séries entières . . . . .	869
67	- Solutions du chapitre : Suites et séries d'applications . . . . .	884
68	- Solutions du chapitre : Séries de Fourier . . . . .	919
69	- Solutions du chapitre : Équations différentielles : étude qualitative . . . . .	940
70	- Solutions du chapitre : Fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel . . . . .	968

CET ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles de MPSI, MP et MP\*. Présenté sous la forme d'un recueil d'exercices accompagnés de leurs solutions, ce livre revisite de manière exhaustive tous les théorèmes et les méthodes des programmes scolaires concernés et constitue ainsi une sorte d'*Encyclopédie* de problèmes et de résultats parfois assez surprenants.

Le manuel regroupe 731 exercices divisés selon 35 chapitres, la première partie étant consacrée au programme de MPSI.

Par ailleurs, cet ouvrage permettra au lecteur un apprentissage et une manipulation progressifs des résultats et des méthodes, dans le sens où la disposition des chapitres entre eux suit une logique didactique.

De plus, au sein de chaque chapitre, les exercices sont agencés de telle sorte que, le cas échéant, ils font intervenir des résultats démontrés dans les exercices précédents.

En règle générale, les premiers exercices des chapitres sont de difficulté moyenne et visent plutôt à une meilleure familiarisation des notions et des techniques nouvelles de résolution.

Dans un deuxième temps, les énoncés ne sont pas nécessairement rangés par ordre croissant de difficulté ; le lecteur ne saura donc pas a priori le niveau de difficulté du problème considéré, ceci dans le but de recréer le contexte des interrogations orales lors des concours aux grandes écoles.

Cependant, lorsque les questions induisent un raisonnement un peu élaboré ou lorsque la méthode d'approche n'est pas évidente, l'élève trouvera des annotations placées en bas de chaque page (le livre en comporte 746), et qu'il pourra consulter ou non, de la même manière qu'un examinateur peut quelquefois donner des indications pour aiguiller le candidat.

**Illustration de couverture :**

Raphaël, *La Madone de saint Sixte* (détail).



ISBN 2-7298-1203-2