



H
Prépa
Maths

Suites et séries

2^{de} année
MP-MP*/PC-PC*
PSI-PSI*

Exercices et problèmes corrigés

H HACHETTE
Supérieur

Université "Moufoud HAMKARI"
Faculté des Sciences
Bibliothèque Département T.C.T

Prépa

M732

Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE
N° d'Inventaire 52293

Suite et séries



Christine FEUILLET

Ancienne élève de l'École Normale Supérieure
de Fontenay-aux-roses

Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Aux Lazaristes à Lyon

Isabelle SELON

Ancienne élève de l'École Normale Supérieure
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Fénelon Sainte-Marie à Paris

Telephore MASERAK

Agrégé de Mathématiques
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Condorcet de Lens

2^{de} année

MP-MP*

PC-PC*

PT-PT*

N° d'Inventaire: 52293

N° de Côte: 5

Sommaire

Avant-propos	3
Chapitre I : Séries numériques	9
<u>1</u> Quelques études de séries numériques	15
<u>2</u> Autres études	15
<u>3*</u> Groupement de termes	16
<u>4**</u> Série dépendant de deux paramètres	16
<u>5*</u> Le critère de condensation de Cauchy	16
<u>6</u> Absolument convergente ? Simplement convergente ?	17
<u>7</u> Une transformation d'Abel (MP)	17
<u>8*</u> Sur la règle de Kummer	17
<u>9*</u> La série $\sum u_n^2 E\left(\frac{1}{u_n}\right)$	18
<u>10</u> Un équivalent de $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$	18
<u>11*</u> Des restes de séries convergentes	19
<u>12</u> Équivalent d'un reste de série convergente	20
<u>13</u> Une série complexe	21
<u>14**</u> Des séries extraites de la série harmonique	22
<u>15*</u> Une méthode d'accélération de convergence	22
<u>16*</u> Des logarithmes et des séries	23
<u>17</u> La série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$	24
<u>18*</u> Nature de la série $\sum \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$	25
<u>19**</u> Un exercice d'oral (MP)	25

<u>20</u>	Des intégrales pour calculer deux expressions de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$	26
<u>21</u>	Convergence et ordre des termes (MP*)	27
Chapitre 2 : Suites sommables		49
<u>1</u>	Sommable ?	52
<u>2</u>	Quelques suites doubles en vrac	52
<u>3</u>	Suites de carré sommable et suite double sommable	53
<u>4**</u>	Une formule d'Euler	54
<u>5*</u>	Les nombres de Bernoulli	54
<u>6**</u>	Fonctions complexes doublement périodiques	55
<u>7**</u>	Où l'on retrouve les fonctions ζ	57
<u>8*</u>	Produit de convolution	58
<u>9*</u>	Problème de synthèse	60
Chapitre 3 : Suites et séries de fonctions		77
<u>1</u>	Suites de fonctions	82
<u>2</u>	D'autres suites de fonctions	82
<u>3*</u>	Convergence normale ? convergence uniforme ?	82
<u>4</u>	La série de fonctions $\sum \frac{2t}{t^2 + n^2}$	83
<u>5*</u>	Un théorème de Dini (MP)	83
<u>6</u>	La série de fonctions $\sum \ln(1 + x^n)$	83
<u>7*</u>	Un équivalent (MP)	84
<u>8</u>	La fonction $\left(x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}\right)$	84
<u>9</u>	Continuité, dérivabilité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-x})^n}{n^2}$	84
<u>10</u>	Trois suites de fonctions	85
<u>11*</u>	Uniforme continuité et convergence uniforme	86
<u>12</u>	Une jolie formule	87
<u>13*</u>	La fonction ln somme d'une suite double (MP)	87

<u>14</u> *	Fonction de deux variables	88
<u>15</u> **	Des séries trigonométriques	89
Chapitre 4 : Séries entières		103
<u>1</u>	Des rayons de convergence	107
<u>2</u>	Comparons des rayons de convergence	107
<u>3</u>	Quelques sommes de séries entières	107
<u>4</u> *	Série numérique et série entière	108
<u>5</u>	Grâce aux matrices (MP et PSI)	109
<u>6</u>	Un produit de Cauchy	109
<u>7</u>	Une série de fonctions	109
<u>8</u>	Suite de Fibonacci et série génératrice	109
<u>9</u> *	Principe des zéros isolés	110
<u>10</u> *	Des sommes de séries entières équivalentes	110
<u>11</u> *	Fonction réciproque de la somme d'une série entière	111
<u>12</u> *	Une intégrale double	111
<u>13</u> **	Un théorème d'Abel et quelques conséquences (MP)	111
<u>14</u> *	Série entière et équation différentielle	112
<u>15</u> *	Jouons avec les séries de fonctions	113
<u>16</u> *	Un théorème d'Abel (MP)	114
<u>17</u>	Développements en série entière	114
<u>18</u>	La formule du binôme	114
<u>19</u> *	Développement en série entière de $\frac{x}{\ln 1-x }$	115
<u>20</u> *	Le théorème de Stone-Weierstrass	117
<u>21</u> *	Inverse de la somme d'une série entière	117
<u>22</u> *	Une équation fonctionnelle	117
<u>23</u> **	La formule intégrale de Cauchy (MP)	118
<u>24</u> *	Étude d'un endomorphisme	118
<u>25</u> *	Un théorème de Bernstein	119
<u>26</u> *	Une fonction définie par une intégrale	119
<u>27</u> **	Un problème d'Euler	121

<u>28*</u>	Une équation différentielle	121
<u>29*</u>	Séries entières et matrices	123
<u>30**</u>	Le développement asymptotique de $\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \leq n} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_n}$	124
<u>31*</u>	Approximations de Padé	125
<u>32</u>	Séries entières et automorphismes	127
<u>33**</u>	Irrationalité de $\ln 2$	129
Chapitre 5 : Séries de Fourier		175
<u>1</u>	La première série de Fourier (1809)	177
<u>2</u>	Une curieuse formule	177
<u>3**</u>	Une série de Fourier à ne pas calculer	177
<u>4</u>	Série de Fourier d'un polygone	178
<u>5</u>	Série de Fourier d'une fonction 2-périodique	178
<u>6*</u>	Somme d'une série trigonométrique ?	179
<u>7</u>	Pas bien difficile !	179
<u>8</u>	Coefficients de Fourier et classe \mathcal{C}^∞	179
<u>9**</u>	Inégalité de Bernstein	179
<u>10</u>	Deux développements en série de Fourier sans calcul de coefficients de Fourier	180
<u>11**</u>	Autour d'une formule d'Euler (1707-1783)	180
<u>12**</u>	Principe du maximum (MP)	182
<u>13*</u>	Cherchez la fonction...	183
<u>14*</u>	Équation différentielle et série de Fourier	183
<u>15*</u>	Convergence de la suite $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) $	184
<u>16**</u>	Zéros d'une fonction continue, 2π -périodique	185
<u>17*</u>	Convergence de la série $\sum a_n$	185
<u>18**</u>	Elle ressemble à une série de Fourier, mais... (MP)	186

La Collection **H-Prépa Maths exercices et problèmes corrigés**, complément indispensable à **H-Prépa Maths cours**, facilite l'assimilation des savoirs et des savoir-faire nécessaires pour les élèves des Classes Préparatoires et pour les étudiants du premier cycle universitaire (DEUG). Après un bref rappel de cours, rassemblant les notions essentielles à connaître, le futur candidat peut s'exercer avec des exercices progressifs. Chaque énoncé est suivi d'un point de départ qui permet à l'étudiant, quel que soit son niveau, de démarrer sans avoir recours à la solution. Les corrigés proposent des démarches claires, progressives et détaillées. L'ensemble d'un ouvrage permet de revoir toutes les notions du programme quel que soit le concours ou l'examen préparé.

**dans la collection 2^{de} année
H-Prépa Maths Cours**

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5. Analyse I : Convergences
2 ^{de} année MP-MP* | 10. Analyse I : Convergences
2 ^{de} année PC-PC* et PSI-PSI* |
| 6. Analyse II : Fonctions d'une variable réelle
2 ^{de} année MP-MP* | 11. Analyse II : Fonctions d'une variable réelle
2 ^{de} année PC-PC* et PSI-PSI* |
| 7. Analyse III : Analyse fonctionnelle et
équations différentielles
2 ^{de} année MP-MP* | 12. Analyse III : Analyse fonctionnelle et
équations différentielles
2 ^{de} année PC-PC* et PSI-PSI* |
| 8. Algèbre-géométrie : les outils
2 ^{de} année MP-MP* | 13. Algèbre linéaire
2 ^{de} année PC-PC* et PSI-PSI* |
| 9. Algèbre-géométrie : les développements
2 ^{de} année MP-MP* | 14. Géométrie
2 ^{de} année PC-PC* et PSI-PSI* |

H-Prépa Maths Exercices et problèmes corrigés

- | | |
|--------------------------------------------|-------------------------------------|
| 4. Suites et séries | 7. Algèbre PC-PSI |
| 5. Algèbre bilinéaire MP | 8. Fonctions d'une variable réelle |
| 6. Algèbre générale et algèbre linéaire MP | 9. Topologie et calcul différentiel |

Suites et séries

Le premier chapitre permet de revoir différentes méthodes d'étude d'une série numérique ou vectorielle.

Le deuxième chapitre, réservé aux étudiants MP, est consacré aux suites doubles sommables. Le problème qui clôt généralise cette notion.

Le troisième chapitre traite des suites et des séries de fonctions. Les modes de convergence sont précisés, conduisant ensuite à la détermination des propriétés des fonctions limites.

Le quatrième chapitre est consacré aux séries entières. Domaine de convergence, calcul de la fonction somme, développement en série entière sont manipulés dans ce chapitre. Vous y rencontrerez aussi quelques questions résolues grâce à l'utilisation de séries entières.

Le cinquième chapitre s'ouvre avec la première série de FOURIER (1809) et s'achève avec une « fausse » série de FOURIER.

Le présent ouvrage, regroupant près de 100 exercices, couvre ainsi la totalité du programme de Seconde année relatif aux suites et séries.



Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans l'autorisation des éditeurs.

Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique et prive les auteurs d'une juste rémunération.

En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction, totale ou partielle, de cet ouvrage est interdite.

14/5403/2



9 782011 454034