Jean Saint Raymond

Topologie calcul différentiel et variable complexe

Calvage & Mounet

Jean SAINT RAYMOND

Topologie calcul différentiel et variable complexe

Cours et exercices

Calvage & Mounet

Table des matières

I. Les nombres réels et les nombres complexes

1. Densité des rationnels 1
2. Racine carrée 3
3. Nombres complexes 4

II. Topologie des espaces métrisables

1. Distances 7
2. Ouverts 8
3. Espaces topologiques 10
4. Intérieur et adhérence 12
5. Sous-espaces et produits 13
6. Suites convergentes 16
7. Applications continues 19
8. Homéomorphismes 26
9. Continuité uniforme 28
10. Espaces métriques séparables 28
11. Exercices 30

III. Espaces compacts

1. La propriété de Borel-Lebesgue 33
2. Espaces métriques compacts 37
3. Produit de compacts métrisables 40
4. Parties compactes de la droite réelle 41
5. Fonctions continues sur un compact 42
6. Espaces localement compacts 45
7. Exercices 47

IV. Espaces complets

1. Suites de Cauchy . . . 53
2. Complétude . . . 55
3. Compacité et complétude . . . 57
4. Prolongement d'une application uniformément continue . . . 58
5. Points fixes des contractions . . . 59
6. Le théorème de Baire . . . 60
7. Exercices . . . 63

V. Espaces connexes

1. Connexité . . . 69
2. Compacts connexes . . . 71
3. Espaces localement connexes . . . 74
4. Exercices . . . 76

VI. Espaces de fonctions continues

1. Ensembles compacts de fonctions continues . . . 81
2. Ensembles denses de fonctions continues . . . 84
3. Exercices . . . 88

VII. Espaces normés

1. Normes . . . 93
2. Espaces normés de dimension finie . . . 96
3. Exemples d'espaces normés . . . 99
4. Applications linéaires continues . . . 101
5. Quotient par un sous-espace fermé . . . 105
6. Applications bilinéaires continues . . . 110
7. Perturbations lipschitziennes de l'identité . . . 112
8. Le théorème de Hahn-Banach . . . 113
9. Le théorème de Banach-Steinhaus . . . 117
10. Exercices . . . 118

VIII. Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire . . . 131
2. Projection orthogonale . . . 135
3. Adjoint d'un opérateur . . . 140
4. Compacité faible . . . 141
5. Exercices . . . 145

IX. Fonctions dérivables

1. Fonctions réelles dérivables 153
2. Opérations sur les fonctions dérivables 154
3. Extremums 156
4. Le théorème des accroissements finis 157
5. Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach 158
6. Inégalité des accroissements finis 161
7. Primitives 163
8. La formule de Taylor 166
9. Exercices 168

X. Fonctions différentiables

1. Notations de Landau. 171
2. Différentiabilité 173
3. Opérations sur les fonctions différentiables 176
4. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ 178
5. Le théorème des accroissements finis 179
6. Limites de fonctions différentiables 183
7. Fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie 186
8. Fonctions différentiables sur un produit 187
9. Applications bilinéaires continues 190
10. Inversion 190
11. Fonctions définies sur un espace de dimension finie 191
12. Matrice jacobienne 193
13. Exercices 195

XI. Différentielles du second ordre

1. Différentielle seconde 199
2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ 200
3. Dérivées partielles secondes 201
4. Le théorème de symétrie de Schwarz 203
5. Formule de Taylor 206
6. Fonctions convexes 208
7. Exercices 211

XII. Fonctions implicites et inversion locale

1. Difféomorphismes 215
2. Second ordre 218
3. Fonctions implicites 219
4. Exercices 222

XIII. Théorèmes du rang constant
1. Rang de la différentielle . . . 227
2. Cas du rang maximum . . . 228
3. Le cas général . . . 231
4. Exercices . . . 236

XIV. Optimisation
1. Extremums sur un ouvert . . . 239
2. Extremums liés . . . 242
3. Conditions du second ordre . . . 245
4. Calcul des variations . . . 252
5. Exercices . . . 256

XV. Fonctions holomorphes
1. Formes différentielles . . . 261
2. Intégrales curvilignes . . . 262
3. Formes différentielles fermées . . . 265
4. Ouverts simplement connexes . . . 269
5. Séries entières . . . 270
6. Fonctions holomorphes . . . 274
7. Exponentielle . . . 276
8. Indice d'un lacet . . . 278
9. Holomorphie et analyticité . . . 279
10. Inégalités de Cauchy . . . 283
11. Limites de fonctions holomorphes . . . 284
12. Logarithme d'une fonction . . . 286
13. Exercices . . . 287

XVI. Le théorème des résidus
1. Singularités isolées . . . 293
2. Fonctions méromorphes . . . 296
3. Le théorème des résidus . . . 298
4. Calculs d'intégrales . . . 300
5. Dérivée logarithmique . . . 304
6. La formule de Jensen . . . 307
7. Exercices . . . 309

XVII. Convergence des fonctions holomorphes
1. Topologie de la convergence compacte . . . 319
2. Le théorème de Montel . . . 322
3. Séries de fonctions méromorphes . . . 323
4. Produits infinis de fonctions holomorphes . . . 325
5. Exercices . . . 330

XVIII. Le principe du maximum
1. Principe du maximum dans un ouvert borné 335
2. Le lemme de Schwarz 335
3. La méthode de Phragmen-Lindelöf 337
4. Exercices 338

XIX. Représentation conforme
1. Équivalence conforme 341
2. Représentation conforme des ouverts simplement connexes . . . 343
3. Exemples de représentations conformes 345
4. Exercices 347

A. Ensembles dénombrables
1. L'ensemble des entiers 349
2. Dénombrabilité 350

B. Le théorème de l'application ouverte
1. Le théorème de l'application ouverte 353
2. Le théorème du graphe fermé 355

C. Connexité dans la sphère de Riemann
1. Compacts connexes de S^2 357

D. Théorèmes de point fixe
1. Points fixes et rétractions 361
2. Champs de vecteurs sur les sphères 363
3. Le théorème de Brouwer 366
4. Le théorème de Schauder 367

E. Quelques problèmes
1. Polygones d'aire maximale 373
2. Densité des fractions rationnelles 375
3. Familles sommables de fonctions holomorphes 377
4. Racine carrée d'un opérateur hermitien positif 379
5. Interpolation complexe (Riesz-Thorin) 380
6. Racine carrée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ 383
7. Valeurs propres d'un opérateur compact 385
8. Un difféomorphisme de ℓ^2 sur lui-même privé d'un point 387
9. Une classe de normes $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 389

F. Indications de solutions
Exercices du chapitre II 391
Exercices du chapitre III 392
Exercices du chapitre IV 394
Exercices du chapitre V 396
Exercices du chapitre VI 398
Exercices du chapitre VII 399
Exercices du chapitre VIII 400
Exercices du chapitre IX 403
Exercices du chapitre X 406
Exercices du chapitre XI 409
Exercices du chapitre XII 411
Exercices du chapitre XIII 414
Exercices du chapitre XIV 414
Exercices du chapitre XV 418
Exercices du chapitre XVI 423
Exercices du chapitre XVII 426
Exercices du chapitre XVIII 429
Exercices du chapitre XIX 431

Bibliographie 433
Notations 437
Index 439

Écrit par un des professeurs les plus appréciés du campus parisien de Jussieu, ce cours de licence –L3– vient à point pour répondre aux besoins des étudiants et de leurs professeurs en analyse fondamentale. On y trouve un traitement complet des fondements et des premiers développements sérieux de la topologie (théorèmes de Baire et de Hahn-Banach), une introduction au calcul différentiel et à l'optimisation, et une initiation solide à l'analyse complexe à une variable (incluant, bien sûr, le théorème des résidus, mais également des développements pertinents sur les séries et produits infinis de fonctions holomorphes, et sur la représentation conforme). Souvent traités dans des manuels séparés, tous ces chapitres sont ici réunis par Jean Saint Raymond, qui leur imprime sa marque et en fait ressortir la profonde unité. Il offre ainsi un instrument unique et puissant aux étudiants de licence, certes, mais aussi aux futurs candidats à l'agrégation ou aux apprentis chercheurs en analyse. Tous trouveront matière à aller au delà des limites habituelles du programme, grâce à deux chapitres plus spécialisés et à trois appendices. L'ouvrage est agrémenté d'une collection très originale d'exercices et de problèmes d'examen, accompagnés, pour la plupart, de solutions rédigées par l'auteur lui-même.

"L'ouvrage de Jean Saint Raymond aura à l'évidence un réel impact sur plusieurs générations d'étudiants."

Hervé Queffélec

Collection.– Mathématiques en devenir

ISBN 978-2-91-635203-9

9 782916 352039

Calvage & Mounet

http://www.calvage-et-mounet.fr

Prix : 39 €