

*finleyre*

Jean-Marie Monier

# Analyse MPSI

**Cours**

**et 1000 exercices  
corrigés**

**NOUVEAU  
PROGRAMME**

**4<sup>e</sup> édition**

**DUNOD**

M725

# Analyse MPSI

Cours et 1 000 exercices corrigés



Université "Mouloud MAMMARI"  
Faculté des Sciences  
Bibliothèque Département T.C.T

**Jean-Marie Monier**

Professeur en classes de Spéciales  
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon

4<sup>e</sup> édition

N° d'Inventaire: 424  $\frac{4}{6}$

N° de Côte: .....

Nouveau tirage corrigé

DUNOD

# Table des matières



Cours

## Chapitre 0

### Programme de début d'année, analyse 3

<b>0.1</b>	Nombres complexes	3
0.1.1	Calculs algébriques sur les nombres complexes	3
0.1.2	Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	6
0.1.3	Applications trigonométriques des nombres complexes	10
0.1.4	Interprétation géométrique des nombres complexes	12
<b>0.2</b>	Fonctions usuelles	18
0.2.1	Logarithme népérien	18
0.2.2	Exponentielle	19
0.2.3	Logarithme de base $a$	20
0.2.4	Exponentielle de base $a$	20
0.2.5	Fonctions puissances	21
0.2.6	Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles	22
0.2.7	Fonctions hyperboliques directes	22
0.2.8	Fonctions hyperboliques réciproques	24
0.2.9	Fonctions circulaires directes	27
0.2.10	Fonctions circulaires réciproques	31
0.2.11	Exponentielle complexe	33
<b>0.3</b>	Équations différentielles linéaires	35
0.3.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	35
0.3.2	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre exponentielle-polynôme	40

## Chapitre 1

### Les nombres réels 47

<b>1.1</b>	Préambule	47
<b>1.2</b>	Nombres réels	48
1.2.1	Existence et unicité de $\mathbb{R}$	48
1.2.2	Propriétés élémentaires des nombres réels	51
1.2.3	Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$	56
<b>1.3</b>	Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$	64
	Compléments	65

# Table des matières



Cours

## Chapitre 0

### Programme de début d'année, analyse 3

- 0.1** Nombres complexes 3
  - 0.1.1 Calculs algébriques sur les nombres complexes 3
  - 0.1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul 6
  - 0.1.3 Applications trigonométriques des nombres complexes 10
  - 0.1.4 Interprétation géométrique des nombres complexes 12
- 0.2** Fonctions usuelles 18
  - 0.2.1 Logarithme népérien 18
  - 0.2.2 Exponentielle 19
  - 0.2.3 Logarithme de base  $a$  20
  - 0.2.4 Exponentielle de base  $a$  20
  - 0.2.5 Fonctions puissances 21
  - 0.2.6 Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles 22
  - 0.2.7 Fonctions hyperboliques directes 22
  - 0.2.8 Fonctions hyperboliques réciproques 24
  - 0.2.9 Fonctions circulaires directes 27
  - 0.2.10 Fonctions circulaires réciproques 31
  - 0.2.11 Exponentielle complexe 33
- 0.3** Équations différentielles linéaires 35
  - 0.3.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre 35
  - 0.3.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre exponentielle-polynôme 40

## Chapitre 1

### Les nombres réels 47

- 1.1** Préambule 47
- 1.2** Nombres réels 48
  - 1.2.1 Existence et unicité de  $\mathbb{R}$  48
  - 1.2.2 Propriétés élémentaires des nombres réels 51
  - 1.2.3 Propriétés fondamentales de  $\mathbb{R}$  56
- 1.3** Droite numérique achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  64
  - Compléments 65

	67
	68
	68
	68
	69
	71
	73
xes	74
	74
	75
ns $\mathbb{C}$	76
	76
xe	77
ts du plan	77
	77
	77
	78
	81
	82
omplexes	82
	82
	83
	86
	<b>87</b>
	88
	88
ites	91
s	93
	98
	102
	102
	105
	108
	111
fficients constants	111
fficients constants	111
	115
	121

## Chapitre 4

## Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

### 4.1 Algèbre des fonctions

- 4.1.1 Algèbre  $\mathbb{K}^X$
- 4.1.2 Relation d'ordre dans  $\mathbb{R}^X$
- 4.1.3 Parité
- 4.1.4 Périodicité
- 4.1.5 Applications en escalier sur un segment
- 4.1.6 Applications polynomiales, applications rationnelles
- 4.1.7 Monotonie
- 4.1.8 Applications majorées, minorées, bornées

### 4.2 Limites

- 4.2.1 Notion de limite
- 4.2.2 Ordre et limite
- 4.2.3 Opérations algébriques sur les fonctions admettant
- 4.2.4 Cas des fonctions monotones

### 4.3 Continuité

- 4.3.1 Définitions
- 4.3.2 Opérations algébriques sur les applications conti
- 4.3.3 Continuité sur un intervalle
- 4.3.4 Continuité sur un segment
- 4.3.5 Application réciproque
- 4.3.6 Continuité uniforme
- 4.3.7 Applications lipschitziennes

## Dérivation

### 5.1 Dérivées

- 5.1.1 Dérivée en un point
- 5.1.2 Propriétés algébriques des fonctions dérivables
- 5.1.3 Application dérivée
- 5.1.4 Dérivées successives
- 5.1.5 Classe d'une fonction
- 5.1.6 Différentielle

### 5.2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements

- 5.2.1 Théorème de Rolle
- 5.2.2 Théorème des accroissements finis

### 5.3 Variations des fonctions

- 5.3.1 Étude de la monotonie pour une fonction dé
- 5.3.2 Étude des extremums pour une fonction déri

### 5.4 Fonctions convexes

- 5.4.1 Définition
- 5.4.2 Utilisation de dérivées dans l'étude de la co
- 5.4.3 Inégalités de convexité

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

## Chapitre 2

## Les nombres complexes

<b>2.1</b>	Préambule	68
<b>2.2</b>	Corps des nombres complexes	68
2.2.1	Définition	68
2.2.2	Conjugaison, partie réelle, partie imaginaire	69
2.2.3	Module	71
2.2.4	Arguments	73
<b>2.3</b>	Interprétation géométrique des nombres complexes	74
2.3.1	Plan complexe	74
2.3.2	Interprétation géométrique de l'addition dans $\mathbb{C}$	75
2.3.3	Interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$	76
2.3.4	Applications $z \mapsto az + b$	76
2.3.5	CNS d'alignement de trois points du plan complexe	77
2.3.6	CNS de cocyclicité ou alignement de quatre points du plan complexe	77
<b>2.4</b>	Puissances et racines	77
2.4.1	Exponentielle d'un imaginaire pur	77
2.4.2	Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul	78
2.4.3	Racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	81
2.4.4	Groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	82
<b>2.5</b>	Applications trigonométriques des nombres complexes	82
2.5.1	Développement de $\cos n\theta$ , $\sin n\theta$ , $\tan n\theta$	82
2.5.2	Linéarisation de $\cos^p \theta$ , $\sin^p \theta$ , $\cos^p \theta \sin^q \theta$	83
	Compléments	86

## Chapitre 3

## Suites numériques

<b>3.1</b>	Convergence, divergence	88
3.1.1	Définitions	88
3.1.2	Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes	91
3.1.3	Propriétés algébriques des suites convergentes	93
3.1.4	Exemples élémentaires de suites	98
<b>3.2</b>	Monotonie	102
3.2.1	Suites réelles monotones	102
3.2.2	Suites adjacentes	105
<b>3.3</b>	Suites extraites	108
<b>3.4</b>	Quelques types usuels de suites	111
3.4.1	Suites récurrentes affines du 1 <sup>er</sup> ordre à coefficients constants	111
3.4.2	Suites récurrentes linéaires du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants	111
3.4.3	Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$	115
	Compléments	121

## Chapitre 4

# Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

125

## 4.1 Algèbre des fonctions

126

- 4.1.1 Algèbre  $\mathbb{K}^X$  126
- 4.1.2 Relation d'ordre dans  $\mathbb{R}^X$  128
- 4.1.3 Parité 130
- 4.1.4 Périodicité 131
- 4.1.5 Applications en escalier sur un segment 133
- 4.1.6 Applications polynomiales, applications rationnelles 134
- 4.1.7 Monotonie 134
- 4.1.8 Applications majorées, minorées, bornées 136

## 4.2 Limites

138

- 4.2.1 Notion de limite 138
- 4.2.2 Ordre et limite 141
- 4.2.3 Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite 143
- 4.2.4 Cas des fonctions monotones 147

## 4.3 Continuité

148

- 4.3.1 Définitions 148
- 4.3.2 Opérations algébriques sur les applications continues 152
- 4.3.3 Continuité sur un intervalle 154
- 4.3.4 Continuité sur un segment 157
- 4.3.5 Application réciproque 160
- 4.3.6 Continuité uniforme 163
- 4.3.7 Applications lipschitziennes 165

## Chapitre 5

# Dérivation

167

## 5.1 Dérivées

167

- 5.1.1 Dérivée en un point 167
- 5.1.2 Propriétés algébriques des fonctions dérivables en un point 171
- 5.1.3 Application dérivée 174
- 5.1.4 Dérivées successives 177
- 5.1.5 Classe d'une fonction 180
- 5.1.6 Différentielle 182

## 5.2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

183

- 5.2.1 Théorème de Rolle 183
- 5.2.2 Théorème des accroissements finis 185

## 5.3 Variations des fonctions

188

- 5.3.1 Étude de la monotonie pour une fonction dérivable 188
- 5.3.2 Étude des extremums pour une fonction dérivable 194

## 5.4 Fonctions convexes

196

- 5.4.1 Définition 196
- 5.4.2 Utilisation de dérivées dans l'étude de la convexité 200
- 5.4.3 Inégalités de convexité 206

## Chapitre 6

## Intégration 209

<b>6.1</b>	Intégration des applications en escalier sur un segment	210
6.1.1	Algèbre des applications en escalier sur un segment	210
6.1.2	Intégrale d'une application en escalier sur un segment	211
<b>6.2</b>	Intégration des applications continues par morceaux sur un segment	214
6.2.1	Algèbre des applications continues par morceaux sur un segment	214
6.2.2	Approximation d'une application continue par morceaux sur un segment par des applications en escalier	215
6.2.3	Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment	217
6.2.4	Propriétés algébriques	218
6.2.5	Propriétés relatives à l'ordre	220
6.2.6	Relation de Chasles	224
6.2.7	Sommes de Riemann	226
<b>6.3</b>	Extension aux fonctions à valeurs complexes	229
<b>6.4</b>	Intégration et dérivation	231
6.4.1	Intégrale fonction de la borne d'en haut	231
6.4.2	Primitives	234
6.4.3	Changement de variable	236
6.4.4	Intégration par parties	237
6.4.5	Formule de Taylor avec reste intégral	239
6.4.6	Approximation d'une intégrale, méthode des rectangles, méthode des trapèzes	241

## Chapitre 7

## Fonctions usuelles 247

<b>7.1</b>	Logarithme népérien	248
<b>7.2</b>	Exponentielle	250
<b>7.3</b>	Logarithmes et exponentielles de base $a$	251
7.3.1	Logarithme de base $a$	251
7.3.2	Exponentielle de base $a$	252
<b>7.4</b>	Puissances	254
<b>7.5</b>	Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles	256
<b>7.6</b>	Fonctions hyperboliques directes	258

## Chapitre 8

<b>7.7</b>	Fonctions hyperboliques réciproques	261
7.7.1	Argsh	261
7.7.2	Argch	262
7.7.3	Argth	263
7.7.4	Supplément : Argcoth	264
<b>7.8</b>	Fonctions circulaires directes	266
<b>7.9</b>	Fonctions circulaires réciproques	271
7.9.1	Arcsin	271
7.9.2	Arccos	272
7.9.3	Arctan	273
<b>7.10</b>	Exponentielle complexe	277
	Compléments	280
	<b>Comparaison locale des fonctions</b>	<b>283</b>
<b>8.1</b>	Prépondérance, domination	284
8.1.1	Définitions	284
8.1.2	Opérations relatives à la prépondérance et à la domination	285
8.1.3	Exemples usuels	287
<b>8.2</b>	Équivalence	288
8.2.1	Définition	288
8.2.2	Opérations relatives à l'équivalence	290
8.2.3	Équivalents usuels	292
8.2.4	Exemples d'utilisation d'équivalents	293
<b>8.3</b>	Développements limités	295
8.3.1	Généralités	295
8.3.2	Le théorème de Taylor-Young	299
8.3.3	Dérivation et primitivation pour un $DL(0)$	301
8.3.4	Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$	303
8.3.5	Exemples d'utilisation de développements limités	311
<b>8.4</b>	Notion de développement asymptotique	314
8.4.1	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}$	314
8.4.2	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	315
8.4.3	Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles	316
<b>8.5</b>	Étude pratique d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ , représentation graphique	318

## Chapitre 8

<b>7.7</b>	Fonctions hyperboliques réciproques	261
7.7.1	Argsh	261
7.7.2	Argch	262
7.7.3	Argth	263
7.7.4	Supplément : Argcoth	264
<b>7.8</b>	Fonctions circulaires directes	266
<b>7.9</b>	Fonctions circulaires réciproques	271
7.9.1	Arcsin	271
7.9.2	Arccos	272
7.9.3	Arctan	273
<b>7.10</b>	Exponentielle complexe	277
	Compléments	280
	<b>Comparaison locale des fonctions</b>	<b>283</b>
<b>8.1</b>	Prépondérance, domination	284
8.1.1	Définitions	284
8.1.2	Opérations relatives à la prépondérance et à la domination	285
8.1.3	Exemples usuels	287
<b>8.2</b>	Équivalence	288
8.2.1	Définition	288
8.2.2	Opérations relatives à l'équivalence	290
8.2.3	Équivalents usuels	292
8.2.4	Exemples d'utilisation d'équivalents	293
<b>8.3</b>	Développements limités	295
8.3.1	Généralités	295
8.3.2	Le théorème de Taylor-Young	299
8.3.3	Dérivation et primitivation pour un $DL(0)$	301
8.3.4	Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$	303
8.3.5	Exemples d'utilisation de développements limités	311
<b>8.4</b>	Notion de développement asymptotique	314
8.4.1	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}$	314
8.4.2	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	315
8.4.3	Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles	316
<b>8.5</b>	Étude pratique d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ , représentation graphique	318

## Chapitre 9

## Calculs de primitives 323

9.1	Préambule	323
9.2	Changement de variable	325
9.3	Primitivation par parties	327
9.4	Liste des primitives usuelles	332
9.5	Primitivation des fonctions rationnelles	334
9.6	Exemples : primitivation de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles	338
9.6.1	Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$	338
9.6.2	Fonctions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$	344
9.6.3	Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$ , $\alpha \in \mathbb{C}^*$	345
9.6.4	Fonctions rationnelles en $x$ et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	346
9.6.5	Fonctions rationnelles en $x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$	348

## Chapitre 10

## Équations différentielles (1<sup>re</sup> étude) 353

10.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	354
10.1.1	Généralités	354
10.1.2	Résolution de l'équation sans second membre	355
10.1.3	Résolution de l'équation avec second membre	358
10.2	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme	366
10.2.1	Généralités	366
10.2.2	Résolution de l'équation sans second membre	367
10.2.3	Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme	370
10.3	Supplément : exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du premier ordre	376
10.3.1	Généralités	376
10.3.2	Équations différentielles à variables séparables	378
10.3.3	Équations homogènes	379
10.3.4	Équations de Bernoulli	382
10.3.5	Équations de Riccati	383
10.3.6	Équations incomplètes en $x$	384
10.3.7	Équations incomplètes en $y$	386
10.3.8	Équations de Lagrange et Clairaut	387

## Chapitre 11

# Notions sur les fonctions de deux variables réelles

389

<b>11.1</b>	Espace $\mathbb{R}^2$ , suites dans $\mathbb{R}^2$	390
11.1.1	Espace $\mathbb{R}^2$	390
11.1.2	Parties ouvertes	393
11.1.3	Suites dans $\mathbb{R}^2$	394
<b>11.2</b>	Limites, continuité	396
11.2.1	Limites	396
11.2.2	Continuité	397
11.2.3	Continuité partielle	400
<b>11.3</b>	Dérivées partielles premières	403
11.3.1	Définitions	403
11.3.2	Applications de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$	404
<b>11.4</b>	Dérivées partielles successives	414
11.4.1	Généralités	414
11.4.2	Applications de classe $C^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$	415
11.4.3	Interversion des dérivations	416
<b>11.5</b>	Extremums des fonctions numériques de deux variables réelles	420
11.5.1	Définitions	420
11.5.2	Étude à l'ordre 1	421
11.5.3	Extremums globaux	422
<b>11.6</b>	Supplément : fonctions implicites	423
11.6.1	Le problème des fonctions implicites	423
11.6.2	Cas de deux variables réelles liées par une relation	424
<b>11.7</b>	Supplément : formes différentielles	428
11.7.1	Définitions	428
11.7.2	Formes différentielles exactes	429
11.7.3	Formes différentielles fermées	430
11.7.4	Plan d'étude d'une forme différentielle, exemples	432
11.7.5	Application à certaines équations différentielles du premier ordre	438
<b>11.7</b>	Analyse vectorielle	440
11.7.1	Définitions	440
11.7.2	Formules d'analyse vectorielle	441
11.7.3	Potentiel scalaire	441

## Chapitre 12

## Compléments de calcul intégral 443

<b>12.1</b> Intégrales curvilignes	444
12.1.1 Arcs orientés, courbes orientées	444
12.1.2 Définition de l'intégrale curviligne	446
12.1.3 Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne	448
12.1.4 Intégrale curviligne et forme différentielle exacte	452
12.1.5 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée	455
12.1.6 Calculs d'aires planes	456
<b>12.2</b> Intégrales doubles	459
12.2.1 Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$	459
12.2.2 Définition de l'intégrale double	464
12.2.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale double	466
12.2.4 Théorème de Fubini	468
12.2.5 Changement de variables dans une intégrale double	471
12.2.6 Formule de Green-Riemann	476
<b>12.3</b> Intégrales triples	477
12.3.1 Parties cubables de $\mathbb{R}^3$	477
12.3.2 Définition de l'intégrale triple	477
12.3.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale triple	477
12.3.4 Théorème de Fubini	478
12.3.5 Changement de variables dans une intégrale triple	479
<b>12.4</b> Masses, centres d'inertie, moments d'inertie	482
12.4.1 Systèmes matériels	482
12.4.2 Masse d'un système matériel	482
12.4.3 Centre d'inertie d'un système matériel	485
12.4.4 Moments d'inertie d'un système matériel	488

## Indications et réponses des exercices

Chap. 0	495
Chap. 1	509
Chap. 2	523
Chap. 3	533
Chap. 4	549
Chap. 5	555
Chap. 6	569
Chap. 7	581
Chap. 8	595
Chap. 9	609
Chap. 10	619
Chap. 11	627
Chap. 12	637
Index des notations	653
Index alphabétique	655

Jean-Marie Monier

4<sup>e</sup> édition

# ANALYSE MPSI

## Cours et 1000 exercices corrigés

Cette 4<sup>e</sup> édition du *cours d'analyse* de Jean-Marie Monier est entièrement conforme aux nouveaux programmes 2003 de la filière MPSI. Elle propose un cours complet, convivial et rigoureux, et de très nombreux exercices tous corrigés.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1<sup>er</sup> cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

JEAN-MARIE MONIER  
est professeur en classe  
de Spéciales au lycée  
La Martinière-Monplaisir  
à Lyon.

COURS		EXERCICES		
1 <sup>re</sup> année	2 <sup>e</sup> année	1 <sup>re</sup> année	2 <sup>e</sup> année	
Analyse MPSI	Analyse MP	Analyse MPSI	Analyse MP	MPSI MP
Algèbre MPSI	Algèbre MP	Algèbre et géométrie MPSI	Algèbre et géométrie MP	
Géométrie MPSI, MP				
Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	PCSI-PTSI PC-PSI-PT
Algèbre PCSI-PTSI	Algèbre PC-PSI-PT	Algèbre et géométrie PCSI-PTSI	Algèbre et géométrie PC-PSI-PT	
Géométrie PCSI-PTSI, PC-PSI-PT				
L'ORAL				
Niveau X, Centrale, Mines		Niveau CCP, e3a, e4a, ESIM		
337 exercices corrigés		409 exercices corrigés		MP-MP*
264 exercices corrigés		324 exercices corrigés		PC-PC*-PSI-PSI*-PT-PT*



ISBN 2 10 007941 7

<http://www.dunod.com>

