



**CALCUL  
DIFFERENTIEL  
ET INTEGRAL**

N PISKOUNOV

**T O M E 2**

TRADUIT  
DU RUSSE

ELLIPSES

~~K95~~ | ~~1/15~~

M 716/7e

N. PISKOUNOV

Université "Mouhoud MAMMERI"  
Faculté des Sciences  
Bibliothèque Département T.C.T

# CALCUL DIFFÉRENTIEL et INTÉGRAL



(en deux volumes)  
tome II

12ème édition

N° d'inventaire: 378  
N° de Côte: ~~1-132116~~ e



ÉDITIONS MIR  
MOSCOU





## TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à la cinquième édition . . . . .	13
---	----

### CHAPITRE XIII

#### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Position du problème. Equation du mouvement du corps pour un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Equation de la chaînette . . . . .	15
§ 2. Définitions . . . . .	18
§ 3. Equations différentielles du premier ordre (notions générales)	19
§ 4. Equations à variables séparées et séparables. Problème de la désintégration du radium . . . . .	25
§ 5. Equations homogènes du premier ordre . . . . .	29
§ 6. Equations se ramenant aux équations homogènes . . . . .	31
§ 7. Equations linéaires du premier ordre . . . . .	34
§ 8. Equation de Bernoulli . . . . .	37
§ 9. Equations aux différentielles totales . . . . .	39
§ 10. Facteur intégrant . . . . .	42
§ 11. Enveloppe d'une famille de courbes . . . . .	44
§ 12. Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre	51
§ 13. Equation de Clairaut . . . . .	52
§ 14. Equation de Lagrange . . . . .	55
§ 15. Trajectoires orthogonales et isogonales . . . . .	56
§ 16. Equations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales)	62
§ 17. Equation de la forme $y^{(n)} = f(x)$ . . . . .	63
§ 18. Quelques types d'équations différentielles du second ordre se ramenant à des équations du premier ordre. Problème de la deuxième vitesse cosmique . . . . .	66
§ 19. Intégration graphique des équations différentielles du second ordre . . . . .	74
§ 20. Equations linéaires homogènes. Définitions et propriétés générales	76
§ 21. Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants . . . . .	83
§ 22. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre $n$ à coefficients constants . . . . .	88

§ 23. Equations linéaires non homogènes du second ordre . . . . .	91
§ 24. Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants . . . . .	95
§ 25. Equations linéaires non homogènes d'ordre $n$ . . . . .	101
§ 26. Equation différentielle d'oscillations mécaniques . . . . .	105
§ 27. Oscillations libres. Représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques . . . . .	107
§ 28. Oscillations forcées . . . . .	110
§ 29. Systèmes d'équations différentielles ordinaires . . . . .	115
§ 30. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants . . . . .	120
§ 31. Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier . . . . .	127
§ 32. Solution approchée des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler . . . . .	142
§ 33. Solution approchée des équations différentielles par la méthode des différences finies basée sur l'application de la formule de Taylor. Méthode d'Adams . . . . .	145
§ 34. Méthode de Runge-Kutta . . . . .	152
§ 35. Méthode approchée d'intégration des systèmes d'équations différentielles du premier ordre . . . . .	157
<i>Exercices</i> . . . . .	162

## CHAPITRE XIV

## INTÉGRALES MULTIPLES

§ 1. Intégrale double . . . . .	176
§ 2. Calcul des intégrales doubles . . . . .	178
§ 3. Calcul des intégrales doubles (suite) . . . . .	184
§ 4. Application des intégrales doubles au calcul d'aires et de volumes . . . . .	191
§ 5. Intégrales doubles en coordonnées polaires . . . . .	193
§ 6. Changement de variables dans une intégrale double (cas général) . . . . .	200
§ 7. Calcul des aires de surfaces . . . . .	205
§ 8. Densité de distribution de matière et intégrale double . . . . .	209
§ 9. Moment d'inertie d'une figure plane . . . . .	210
§ 10. Coordonnées du centre de gravité d'une figure plane . . . . .	215
§ 11. Intégrales triples . . . . .	217
§ 12. Calcul des intégrales triples . . . . .	218
§ 13. Changement de variables dans une intégrale triple . . . . .	223
§ 14. Moment d'inertie et coordonnées du centre de gravité d'un corps . . . . .	227
§ 15. Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	229
<i>Exercices</i> . . . . .	231

## CHAPITRE XV

## INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

§ 1. Intégrale curviligne . . . . .	238
§ 2. Calcul de l'intégrale curviligne . . . . .	241
§ 3. Formule de Green . . . . .	248
§ 4. Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration . . . . .	250
§ 5. Intégrales de surface . . . . .	255
§ 6. Calcul des intégrales de surface . . . . .	257
§ 7. Formule de Stokes . . . . .	260
§ 8. Formule d'Ostrogradsky . . . . .	265
§ 9. Opérateur hamiltonien et quelques applications . . . . .	267
<i>Exercices</i> . . . . .	271

## CHAPITRE XVI

## SÉRIES

§ 1. Série. Somme d'une série . . . . .	277
§ 2. Condition nécessaire de convergence d'une série . . . . .	280
§ 3. Comparaison des séries à termes positifs . . . . .	283
§ 4. Règle de d'Alembert . . . . .	285
§ 5. Règle de Cauchy . . . . .	289
§ 6. Comparaison avec une intégrale . . . . .	290
§ 7. Séries alternées. Théorème de Leibniz . . . . .	294
§ 8. Séries à termes de signes quelconques. Convergence absolue et semi-convergence . . . . .	296
§ 9. Séries de fonctions . . . . .	300
§ 10. Séries majorables . . . . .	301
§ 11. Continuité de la somme d'une série . . . . .	303
§ 12. Intégration et dérivation des séries . . . . .	306
§ 13. Séries entières ou séries de puissances. Intervalle de convergence . . . . .	309
§ 14. Dérivation des séries entières . . . . .	314
§ 15. Séries de puissances de $x - a$ . . . . .	315
§ 16. Séries de Taylor et de Maclaurin . . . . .	316
§ 17. Exemples de développement de fonctions en séries . . . . .	318
§ 18. Formule d'Euler . . . . .	320
§ 19. Formule générale du binôme . . . . .	321
§ 20. Développement de la fonction $\text{Log}(1 + x)$ en série entière. Calcul de logarithmes . . . . .	324
§ 21. Application des séries au calcul d'intégrales définies . . . . .	326
§ 22. Application des séries à l'intégration d'équations différentielles . . . . .	328
§ 23. Equation de Bessel . . . . .	331
§ 24. Séries à termes complexes . . . . .	336
§ 25. Séries entières d'une variable complexe . . . . .	337

§ 26. Résolution de l'équation différentielle du premier ordre par la méthode des approximations successives (méthode d'itération)	339
§ 27. Démonstration de l'existence de la solution d'une équation différentielle. Evaluation de l'erreur d'une solution approchée . . .	341
§ 28. Théorème d'unicité de la solution de l'équation différentielle	346
<i>Exercices</i> . . . . .	347

## CHAPITRE XVII

## SÉRIES DE FOURIER

§ 1. Définition. Position du problème . . . . .	356
§ 2. Exemples de développement de fonctions en séries de Fourier	360
§ 3. Une remarque sur le développement des fonctions périodiques en séries de Fourier . . . . .	366
§ 4. Séries de Fourier des fonctions paires et impaires . . . . .	368
§ 5. Séries de Fourier des fonctions de période $2l$ . . . . .	369
§ 6. Sur le développement en série de Fourier d'une fonction non périodique . . . . .	371
§ 7. Approximation en moyenne d'une fonction donnée au moyen de polynômes trigonométriques . . . . .	373
§ 8. Intégrale de Dirichlet . . . . .	379
§ 9. Convergence d'une série de Fourier en un point donné . . . . .	381
§ 10. Quelques conditions suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier . . . . .	383
§ 11. Analyse harmonique numérique . . . . .	386
§ 12. Série de Fourier sous forme complexe . . . . .	387
§ 13. Intégrale de Fourier . . . . .	389
§ 14. Forme complexe de l'intégrale de Fourier . . . . .	393
§ 15. Série de Fourier suivant un système orthogonal de fonctions	396
§ 16. Notion d'espace fonctionnel linéaire. Analogie entre le développement de fonctions en séries de Fourier et la décomposition des vecteurs . . . . .	398
<i>Exercices</i> . . . . .	403

## CHAPITRE XVIII

## ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1. Principaux types d'équations de la physique mathématique . . .	405
§ 2. Etablissement de l'équation pour des cordes vibrantes. Formulation du problème aux limites. Etablissement de l'équation pour des oscillations électriques dans un conducteur . . . . .	406
§ 3. Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de séparation des variables (méthode de Fourier) . . . . .	410
§ 4. Equation de la propagation de la chaleur dans une barre. Enoncé du problème aux limites . . . . .	413

§ 5. Propagation de la chaleur dans l'espace . . . . .	416
§ 6. Résolution du premier problème aux limites pour l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies . . . . .	419
§ 7. Propagation de la chaleur dans une barre infinie . . . . .	421
§ 8. Problèmes conduisant à l'étude des solutions de l'équation de Laplace. Énoncé des problèmes aux limites . . . . .	427
§ 9. Équation de Laplace en coordonnées cylindriques. Résolution du problème de Dirichlet pour un anneau avec des valeurs constantes de la fonction recherchée sur les circonférences intérieure et extérieure . . . . .	432
§ 10. Résolution du problème de Dirichlet pour le cercle . . . . .	434
§ 11. Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies . . . . .	437
<i>Exercices</i> . . . . .	440

## CHAPITRE XIX

## CALCUL OPÉRATIONNEL ET APPLICATIONS

§ 1. Original et image . . . . .	444
§ 2. Image des fonctions $\sigma_0(t)$ , $\sin t$ , $\cos t$ . . . . .	446
§ 3. Image des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante. Image des fonctions $\sin at$ , $\cos at$ . . . . .	447
§ 4. Propriété de linéarité de l'image . . . . .	448
§ 5. Théorème du déplacement . . . . .	449
§ 6. Image des fonctions $e^{-\alpha t}$ , $\text{sh } \alpha t$ , $\text{ch } \alpha t$ , $e^{-\alpha t} \sin at$ , $e^{-\alpha t} \cos at$ . . . . .	450
§ 7. Dérivation de l'image . . . . .	451
§ 8. Image des dérivées . . . . .	453
§ 9. Dictionnaire d'images . . . . .	454
§ 10. Équation auxiliaire d'une équation différentielle donnée . . . . .	456
§ 11. Théorème de décomposition . . . . .	460
§ 12. Exemples de résolution des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel . . . . .	461
§ 13. Théorème de convolution . . . . .	463
§ 14. Équations différentielles des oscillations mécaniques. Équations différentielles de la théorie des circuits électriques . . . . .	466
§ 15. Résolution de l'équation différentielle des oscillations . . . . .	467
§ 16. Étude des oscillations libres . . . . .	469
§ 17. Étude des oscillations harmoniques amorties dans le cas d'une force extérieure périodique . . . . .	469
§ 18. Solution de l'équation des oscillations dans le cas de la résonance . . . . .	471
§ 19. Théorème du retard . . . . .	473
§ 20. La fonction delta et son image . . . . .	474
<i>Exercices</i> . . . . .	477

## CHAPITRE XX

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS ET DE LA  
STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1.	Événement aléatoire. Fréquence relative d'un événement aléatoire Probabilité d'un événement. Objet de la théorie des probabilités	480
§ 2.	Définition classique de la probabilité et calcul direct des proba- bilités . . . . .	481
§ 3.	Somme des probabilités. Événements aléatoires contraires . . .	484
§ 4.	Produit des probabilités des événements indépendants . . . . .	488
§ 5.	Événements dépendants. Probabilité conditionnelle. Probabilité totale . . . . .	489
§ 6.	Probabilités des causes. Formule de Bayes . . . . .	493
§ 7.	Variable aléatoire discrète. Loi de distribution d'une variable aléatoire discrète . . . . .	495
§ 8.	Fréquence relative et probabilité de la fréquence relative au cours des épreuves répétées . . . . .	497
§ 9.	Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète . . .	502
§ 10.	Variance. Ecart quadratique moyen. Notion de moments . . .	506
§ 11.	Fonction de variables aléatoires . . . . .	510
§ 12.	Variable aléatoire continue. Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue. Probabilité pour qu'une variable aléatoire appartienne à un intervalle donné . . . . .	511
§ 13.	Fonction de répartition ou loi intégrale de distribution. Loi de distribution uniforme . . . . .	515
§ 14.	Caractéristiques numériques d'une variable aléatoire continue	518
§ 15.	Loi normale de distribution. Espérance mathématique de la distribution normale . . . . .	521
§ 16.	Variance et écart quadratique moyen d'une variable aléatoire suivant la loi de distribution normale . . . . .	524
§ 17.	Probabilité d'appartenance d'une valeur de la variable aléatoire à un intervalle donné. Fonction de Laplace. Fonction de répar- tition de la loi normale . . . . .	525
§ 18.	Ecart médian . . . . .	529
§ 19.	Expression de la loi normale en fonction de l'écart médian. Fonction réduite de Laplace . . . . .	531
§ 20.	Règle des trois sigmas. Echelle des probabilités de distribution des erreurs . . . . .	532
§ 21.	Erreur arithmétique moyenne . . . . .	534
§ 22.	Mesure de précision. Relations entre les caractéristiques de dis- tribution des erreurs. . . . .	534
§ 23.	Variable aléatoire bidimensionnelle . . . . .	535
§ 24.	Loi normale de distribution sur le plan . . . . .	539
§ 25.	Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle normalement distribuée appartienne à un rectangle de côtés parallèles aux axes principaux de dispersion . . . . .	541

§ 26. Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle prenne une valeur appartenant à l'ellipse de dispersion . . . . .	543
§ 27. Problèmes de la statistique mathématique. Matériel statistique . . . . .	544
§ 28. Série statistique. Histogramme . . . . .	545
§ 29. Détermination de la valeur acceptable d'une grandeur mesurée . . . . .	548
§ 30. Estimation des paramètres de la loi de distribution. Théorème de Liapounov. Théorème de Laplace . . . . .	550
<i>Exercices</i> . . . . .	554

## CHAPITRE XXI

**MATRICES. ÉCRITURE MATRICIELLE DES SYSTÈMES  
ET RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  
LINÉAIRES**

§ 1. Transformations linéaires. Matrice . . . . .	557
§ 2. Définitions générales liées à la notion de matrice . . . . .	560
§ 3. Transformation inverse . . . . .	562
§ 4. Opérations sur les matrices. Addition des matrices . . . . .	564
§ 5. Transformation d'un vecteur en un autre vecteur à l'aide d'une matrice . . . . .	569
§ 6. Matrice inverse . . . . .	570
§ 7. Calcul de la matrice inverse . . . . .	571
§ 8. Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires et des solutions d'un système d'équations linéaires . . . . .	573
§ 9. Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode matricielle . . . . .	574
§ 10. Application orthogonale. Matrices orthogonales . . . . .	577
§ 11. Vecteur propre d'une transformation linéaire . . . . .	580
§ 12. Matrice d'une transformation linéaire pour laquelle les vecteurs de base sont les vecteurs propres . . . . .	583
§ 13. Transformation de la matrice d'une transformation linéaire lors du passage d'une base à une autre . . . . .	585
§ 14. Formes quadratiques et leur transformation . . . . .	587
§ 15. Rang d'une matrice. Existence des solutions d'un système d'équations linéaires . . . . .	589
§ 16. Dérivation et intégration des matrices . . . . .	591
§ 17. Ecriture matricielle d'un système d'équations différentielles et des solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients constants . . . . .	593
§ 18. Ecriture matricielle d'une équation linéaire du $n$ -ième ordre . . . . .	598
§ 19. Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables par la méthode des approximations successives en utilisant l'écriture matricielle . . . . .	600
<i>Exercices</i> . . . . .	604
<i>Annexes</i> . . . . .	606
<i>Index</i> . . . . .	609

# Calcul intégral et différentiel

en deux volumes

**Cet ouvrage est un manuel de mathématiques destiné aux étudiants des établissements d'enseignement technique supérieur.**

**En plus des développements habituellement traités dans les cours d'analyse mathématique, il contient l'exposé des notions indispensables aujourd'hui pour l'assimilation des disciplines liées à l'automation et aux méthodes de calcul automatique.**

**De nombreux problèmes et exercices accompagnent chaque chapitre du cours et facilitent l'assimilation de la partie théorique. Certains ont été résolus et commentés à titre d'exemples. Cela rend l'usage de ce manuel particulièrement précieux pour les autodidactes.**

**Le présent ouvrage a été réédité 9 fois en russe et traduit également en anglais et en espagnol.**



ISBN 2-7298-9341-5