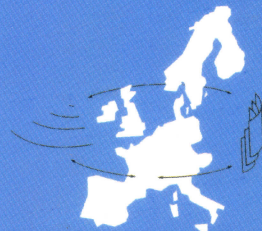


Myriam MAUMY  
Jacques VAUTHIER

# Calcul différentiel et intégral

*Licence de Mathématiques*



EADTU

Enseignement à distance universitaire européen

# Calcul différentiel et intégral



Myriam MAUMY

Maître ès Sciences Mathématiques  
de l'Université Pierre et Marie Curie  
Sorbonne-Paris VI  
Diplômée d'études supérieures  
en Mathématiques Pures

Jacques VAUTHIER

Professeur à l'Université  
Pierre et Marie Curie  
Sorbonne-Paris VI  
Secrétaire général adjoint de l'EADTU

N° d'inventaire: 376.....

$\frac{2}{3}$

N° de Côte: ~~19-1237-22~~ =



# Table des matières



<b>Avant-propos</b>	1
<b>Introduction à l'intégration</b>	3
<b>Chapitre I. Intégrales de Riemann-Stieljes</b>	5
1. Fonctions à variation bornée (F.V.B.)	6
2. Intégrales de Stieljes pour $\alpha$ croissante	13
3. Intégrales de Stieljes par rapport à $\alpha$ à V.B.	21
<b>Annexe</b>	24
• Intégrale de Riemann sur un fermé borné $[a, b]$ de $R$	24
• Intégrales de Riemann sur un intervalle non borné	26
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	28
<b>Chapitre II. Les séries de Fourier</b>	31
1. Coefficients de Fourier	31
2. Noyaux de Dirichlet et de Féjer	33
3. Théorème de Dirichlet	41
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	45
<b>Chapitre III. L'intégrale de Lebesgue</b>	49
1. Un peu de topologie	49
2. Les $\alpha$ -algèbres	51
3. Mesures positives	53
4. Intégrales de Lebesgue pour les fonctions positives	55
5. Intégrales de fonctions à valeurs complexes	61
6. Du presque partout ?	63
7. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	65
8. Espaces $L^1(x)$ et $L^2(x)$	71

9. Les trois convergences fondamentales	75
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	79
<b>Chapitre IV. Le théorème de Fubini</b>	83
1. $\sigma$ -algèbre sur le produit $(X, \mathcal{A}) \times (Y, \mathcal{B})$	83
2. Mesure produit	87
3. Convolution sur $\mathbb{R}$	91
4. Troncature et régularisation	93
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	97
<b>Chapitre V. La transformation de Fourier</b>	101
1. Définition de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	101
2. Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz	103
3. L'inversion de Fourier dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$	111
4. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	115
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	117
<b>Chapitre VI. Espaces de Hilbert. Séries de Fourier</b>	121
1. Produit scalaire. Norme	123
2. Projection sur un convexe fermé	124
3. Familles totales dans un espace de Hilbert	130
4. Dualité dans les espaces de Hilbert	139
5. Réduction des endomorphismes normaux compacts	143
6. Alternative de Fredholm	148
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	149
<b>Chapitre VII. Le théorème de Radon-Nicodym</b>	153
1. Mesures complexes	155
2. Théorie de Radon-Nicodym	158
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	164

<i>TABLES DES MATIÈRES</i>	III
<b>Introduction au calcul différentiel</b>	167
<b>Chapitre VIII. Espaces normés. Théorème de Baire. Application</b>	169
1. Définitions	171
2. Continuité	173
3. Théorème de Baire	179
4. La compacité	185
5. La compacité et les espaces normés de dimension finie	190
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	193
<b>Chapitre IX. Calcul différentiel sur <math>\mathbb{R}^n</math></b>	197
1. Dérivée suivant un vecteur	197
2. Dérivée d'une fonction	198
3. Matrices jacobiniennes	200
4. Dérivée de fonctions élémentaires. Dérivée d'une fonction composée	201
5. Le théorème des accroissements finis	205
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	209
<b>Chapitre X. Dérivée d'ordre supérieur. Formules de Taylor. Extremum</b>	213
1. Dérivée d'ordre supérieur	213
2. Formules de Taylor	217
3. Extrema relatifs	218
4. Extrema liés	219
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	221
<b>Chapitre XI. Les grands théorèmes</b>	225
1. Théorème de l'inverse local	225
2. Théorème des fonctions implicites	229
3. Le théorème du rang constant	230
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	230

<b>Chapitre XII. Equations différentielles</b>	239
1. Position du problème	239
2. Théorème de Peano	241
3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz	244
4. Point de vue des champs de vecteurs	249
5. Etude duale par les formes différentielles	253
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	258
 <b>Chapitre XIII. Equations différentielles linéaires</b>	261
1. Le cas linéaire sur $\mathbb{R}$	261
2. Equations différentielles linéaires d'ordre $n$ homogènes à coefficients constants	262
3. Equations linéaires vectorielles	264
4. Résolvante d'un système linéaire	266
5. Etude dans le champ complexe	269
6. Cas des équations $X'(z) = \frac{1}{z}A(z) \times (z)$	273
7. Développements asymptotiques	279
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	284
 <b>Chapitre XIV. Equations de Sturm-Liouville</b>	287
1. Exemple de résolution d'une équation aux dérivées partielles	287
2. Problème de Sturm-Liouville	288
3. Etude des équations de Sturm-Liouville réduites	290
4. Théorème d'unicité du problème de Sturm-Liouville	291
5. Construction de la fonction de Green	295
6. Opérateurs à noyaux	297
7. Retour à la résolution des équations de Sturm-Liouville	298
8. Exemples	
<b>Tests de compréhension du chapitre</b>	305
 <b>Bibliographie</b>	309
 <b>Index</b>	311

**L**ES auteurs ont voulu réunir dans ce livre les deux axes de la licence de mathématiques : le calcul différentiel et le calcul intégral pour permettre aux étudiants d'avoir accès rapidement à l'essentiel. Ecrit dans un style direct avec des objectifs définis en tête de chapitre, des commentaires sur les théorèmes et enfin des questions tests, il a été conçu principalement à l'attention des étudiants qui suivent un enseignement "à distance" (European Association of Distant Teaching Universities – EADTU).



9

782729858902

ISBN 2-7298-5890-3