

€1218/1

**F. Delmer**

*1<sup>er</sup> cycle universitaire*

**Mathématiques**  
**les séries**

**Rappels du cours  
et exercices résolus**

DUNOD

G493 12/5 M712

# Mathématiques

## les séries

### Rappels du cours et exercices résolus



**Francine Delmer**

Maître de conférences à l'Université Bordeaux 1  
Agrégee de mathématiques

Faculté des Sciences  
BIBLIOTHEQUE  
N° d'Inventaire... 51218

4/3

N° de Côte... ~~12.165.9135~~

DUNOD

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1. Séries à termes positifs</b>	<b>1</b>
I. Généralités sur les séries numériques	1
1. Définitions	1
2. Premières conséquences	2
3. Deux exemples de base	3
4. Opérations sur les séries	3
5. Critère de Cauchy	4
6. Condition nécessaire de convergence d'une série	4
II. Séries à termes positifs	5
1. Règles de comparaison	5
2. Méthodes de Cauchy et de d'Alembert	6
3. Comparaison des deux règles	7
4. Réarrangement	8
III. Extension de l'intégrale	9
1. Définition	9
2. Critère de Cauchy	10
IV. Intégrales généralisées	10
1. Exemple fondamental	10
2. Règles de comparaison	11
V. Relations entre séries et intégrales	12
1. Les séries de Riemann	12
2. Comparaison d'une série à termes positifs avec les séries de Riemann	12
Exercices	
1. a. Règles de comparaison	13
1. b. Règles de Cauchy et de d'Alembert	15
1. c. Extension de l'intégrale	16
1. d. Intégrales généralisées et séries, divers	17
<b>Chapitre 2. Séries à termes réels ou complexes</b>	<b>21</b>
I. Séries absolument convergentes	21
1. Définition	21
2. Produit de séries absolument convergentes	22

3. Une propriété des séries absolument convergentes	23
II. Méthodes d'investigation	23
III. Sommation d'Abel	24
1. Séries alternées	26
2. Exemple fondamental	26
IV. Reste d'une série convergente	26
1. Définition	26
2. Propriétés	27
3. Calculs numériques	27
Exercices	
2. a. Séries absolument convergentes, séries alternées	28
2. b. Séries à termes complexes	30
2. c. Sommation d'Abel, exercices divers	30
2. d. Calcul approché de la somme	32
<b>Chapitre 3. Suites et séries de fonctions</b>	<b>35</b>
I. Suites de fonctions	35
1. Définitions	35
2. Propriétés liées à la convergence uniforme	37
3. Critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions	39
II. Séries de fonctions	39
1. Définitions	40
2. Critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions	41
3. Convergence normale d'une série de fonctions	41
4. Propriétés de la somme d'une série de fonctions, liées à la convergence uniforme	42
5. Critère de convergence uniforme	44
Exercices	
3. a. Suites de fonctions, exercices de calcul	44
3. b. Suites de fonctions, exercices théoriques	47
3. c. Suites de fonctions, intégration, dérivation	49
3. d. Séries de fonctions, convergence	51
3. e. Séries de fonctions, intégration, dérivation	52

## II. Méthodes des séries absolument

## II. MÉTHODES D'INVESTIGATION

III. Sommatation d'Abel	24
1. <i>Séries alternées</i>	26
2. Exemple fondamental	26
IV. Reste d'une série convergente	26
1. Propriétés	27
2. Propriétés	27
3. Calculs numériques	27

## Exercices

2. a. Séries absolument convergentes, séries alternées	28
2. b. Séries à termes complexes	30
2. c. Sommatation d'Abel, exercices divers	30
2. d. Calcul approché de la somme	32

## Chapitre 3. Suites et séries de fonctions 35

I. Suites de fonctions	35
1. Définitions	35
2. Propriétés liées à la convergence uniforme	37
3. Critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions	39
II. Séries de fonctions	39
1. Définitions	40
2. Critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions	41
3. Convergence normale d'une série de fonctions	41
4. Propriétés de la somme d'une série de fonctions, liées à la convergence uniforme	42
5. Critère de convergence uniforme	44

## Exercices

3. a. Suites de fonctions, exercices de calcul	44
3. b. Suites de fonctions, exercices théoriques	47
3. c. Suites de fonctions, intégration, dérivation	49
3. d. Séries de fonctions, convergence	51
3. e. Séries de fonctions, intégration, dérivation	52

<b>Chapitre 4. Séries entières</b>	<b>57</b>
I. Domaine de convergence	57
1. Définitions	57
2. Détermination pratique de $R$	59
II. Opérations algébriques	60
1. Addition, multiplication par un scalaire	60
2. Multiplication de deux séries entières	60
III. Propriétés analytiques	61
1. Continuité	61
2. Série des dérivées	62
3. Série des primitives	63
IV. Développement en série entière	64
1. Définition	64
2. Série de Mac-Laurin	64
3. Développement limité au voisinage de l'origine	66
V. Développement de fonctions usuelles	66
1. Séries géométrique et exponentielle	66
2. Combinaisons linéaires, changement de variable	67
3. Intégration, dérivation	67
4. Série du binôme	68
VI. Fonctions d'une variable complexe	69
1. Définition	69
2. Propriétés	69
3. Zéros isolés, prolongement analytique	70
4. Exponentielle complexe	70
<b>Exercices</b>	
4. a. Domaine de convergence	72
4. b. Sommation des séries entières	74
4. c. Sommation de séries numériques à partir de séries entières	76
4. d. Exercices théoriques	77
4. e. Développements en série entière	80
4. f. Développements en série de Taylor, fonctions complexes	84

<b>Chapitre 5. Séries de Fourier</b>	87
I. Séries trigonométriques	88
1. Définitions	88
2. Propriétés	89
II. Coefficients et séries de Fourier	90
1. Définitions	90
2. Propriétés	92
III. Convergence	92
IV. Formule de Parseval-Plancherel	95
 Exercices	
5. a. Séries trigonométriques, coefficients de Fourier	97
5. b. Fonctions $2T$ -périodiques	100
5. c. Intégration et dérivation des séries de Fourier	100
5. d. Quelques problèmes sur la méthode de Fourier	101
1. Fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-2\lambda \cos x + \lambda^2}$	101
2. Intégration terme à terme	102
3. Équation des cordes vibrantes	104
4. Équation de la propagation de la chaleur	105
 <b>Chapitre 1. Solutions</b>	 107
1. a. Règles de comparaison	107
1. b. Règles de Cauchy et de d'Alembert	118
1. c. Extension de l'intégrale	122
1. d. Liens entre intégrales et séries	127
 <b>Chapitre 2. Solutions</b>	 137
2. a. Séries absolument convergentes, séries alternées	137
2. b. Séries à termes complexes	149
2. c. Sommation d'Abel. Exercices divers	152
2. d. Calcul approché de la somme	164
 <b>Chapitre 3. Solutions</b>	 167
3. a. Suites de fonctions, exercices de calcul	167
3. b. Suites de fonctions, exercices théoriques	186
3. c. Suites de fonctions, intégration, dérivation	193

---

3. d. Séries de fonctions, convergence	201
3. e. Séries de fonctions, intégration, dérivation	209
<b>Chapitre 4. Solutions</b>	<b>219</b>
4. a. Domaine de convergence	219
4. b. Sommation des séries entières	234
4. c. Sommation de séries numériques à partir de séries entières	245
4. d. Exercices théoriques	250
4. e. Développements en série entière	261
4. f. Développements en série de Taylor, fonctions complexes	286
<b>Chapitre 5. Solutions</b>	<b>293</b>
5. a. Séries trigonométriques, coefficients de Fourier	293
5. b. Fonctions $2T$ -périodiques	307
5. c. Intégration et dérivation des séries de Fourier	309
5. d. Quelques problèmes sur la méthode de Fourier	313
1. Fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-2\lambda \cos x + \lambda^2}$	313
2. Intégration terme à terme	314
3. Équation des cordes vibrantes	320
4. Équation de la propagation de la chaleur	322

F. Delmer

# Mathématiques les séries

## Rappels du cours et exercices résolus

**C**e manuel, fruit d'une longue expérience d'enseignant, s'adresse aux étudiants en 2<sup>e</sup> année de 1<sup>er</sup> cycle universitaire scientifique dans toute filière mathématique ou physique.

Il se compose de **rappels de cours substantiels** donnant les théorèmes et les résultats essentiels dans un cadre suffisamment large pour **couvrir tous les programmes consacrés aux séries**. Les **exercices**, tous entièrement **résolus** et **testés** auprès des étudiants, sont regroupés par thèmes à la fin de chaque chapitre et suivent la chronologie du cours. Ils ont été rédigés de manière à favoriser un **travail autonome et efficace** en partant des notions les plus élémentaires.

Enfin, **des problèmes de synthèse** qui se rapportent souvent à des textes possibles d'examen, permettent de résoudre des questions concrètes plus globales ou d'approfondir quelques points du cours.

1- Séries à termes positifs, théorèmes de convergence, opérations sur les séries, critère de Cauchy, règles de comparaison, intégrales généralisées, comparaison entre séries et intégrales, méthodes d'étude. 2- Séries réelles à termes de signe quelconque, séries à termes complexes, convergence absolue, produit de séries absolument convergentes, méthode d'Abel, reste d'une série convergente. 3- Suites et séries de fonctions, convergence uniforme, critère de Cauchy, convergence normale des séries de fonctions, intégration, dérivation. 4- Séries entières, domaine de convergence, propriétés algébriques, continuité, intégration, dérivation. Série de Mac-Laurin, développement en série entière, fonctions d'une variable complexe définies comme somme d'une série entière. 5- Série de Fourier, coefficients, théorème de convergence de Jordan-Dirichlet, formule de Parseval-Plancherel, résolution de problèmes liés à la physique, (équations de la chaleur et des cordes vibrantes).



9 782100 026357

Code 042635  
ISBN 2 10 002635 6

