

l'intégrale

Jean-Marie Monier

Analyse MP

Cours

**et 1 000 exercices
corrigés**

**NOUVEAU
PROGRAMME**

4^e édition

DUNOD

Université Mouloud MAMMARI
Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE

M705

Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE
N° d'inventaire 32268/A
#

Analyse MP

2^e année

Cours et 1 000 exercices corrigés



Jean-Marie Monier

*Professeur en classes de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*

N° de Cote: M705/4e

4^e édition

DUNOD

Table des matières



Première partie – Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

3

1.1	Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé	4
1.1.1	Norme, distance associée	4
1.1.2	Boules, sphères	12
1.1.3	Parties bornées d'un evn	13
1.1.4	Voisinages	14
1.1.5	Ouverts, fermés	15
1.1.6	Comparaison de normes	19
1.1.7	Intérieur, adhérence, frontière	24
1.1.8	Distance d'un point à une partie non vide d'un evn	28
1.1.9	Suites dans un evn	29
1.1.10	Supplément : points d'accumulation, point isolés	39
1.2	Limites, continuité	40
1.2.1	Limites	40
1.2.2	Continuité	44
1.2.3	Continuité uniforme	48
1.2.4	Applications lipschitziennes	49
1.2.5	Supplément : homéomorphismes	52
1.2.6	Applications linéaires continues	54
1.3	Compacité	59
1.3.1	Généralités	59
1.3.2	Cas de la dimension finie	66
1.4	Complétude	70
1.4.1	Suites de Cauchy	70
1.4.2	Parties complètes	71
1.4.3	Supplément : théorème du point fixe	76
1.5	Connexité par arcs	77
1.5.1	Connexité par arcs dans un evn de dimension finie	77
1.5.2	Supplément : connexité	81
1.5.3	Supplément : composantes connexes	85
1.6	Espaces préhilbertiens	87
1.6.1	Produit scalaire	87
1.6.2	Inégalités, normes euclidiennes	91
1.6.3	Orthogonalité	95
1.6.4	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	99

Chapitre 2

1.6.5	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	101
1.6.6	Norme d'un endomorphisme d'un espace euclidien	104
	Compléments aux exercices	107

Fonctions vectorielles d'une variable réelle 111

2.1 Généralités 112

2.1.1	Structure de E^X	112
2.1.2	Parité	112
2.1.3	Périodicité	114
2.1.4	Applications bornées	115
2.1.5	Limites	116
2.1.6	Continuité par morceaux	118

2.2 Dérivation 122

2.2.1	Dérivée en un point	122
2.2.2	Propriétés algébriques des applications dérivables en un point	124
2.2.3	Application dérivée	126
2.2.4	Dérivées successives	129
2.2.5	Classe d'une application	131
2.2.6	Supplément : différentielle	135
2.2.7	Dérivation des fonctions à valeurs matricielles	135

2.3 Intégration sur un segment 137

2.3.1	Intégration des applications en escalier sur un segment	137
2.3.2	Suites d'applications (1 ^{re} étude)	139
2.3.3	Approximation uniforme par des applications en escalier ou par des applications affines par morceaux et continues	144
2.3.4	Intégration des applications continues par morceaux sur un segment	146
2.3.5	Sommes de Riemann	153
2.3.6	Intégration et dérivation	155
2.3.7	Inégalité des accroissements finis	158
2.3.8	Changement de variable	161
2.3.9	Intégration par parties	162
2.3.10	Formule de Taylor avec reste intégral	163
2.3.11	Théorème de relèvement	164

2.4 Comparaison locale 167

2.4.1	Prépondérance, domination	167
2.4.2	Équivalence	169
2.4.3	Développements limités vectoriels	170
	Compléments aux exercices	172

Chapitre 3

Intégration sur un intervalle quelconque 173

3.1 Fonctions intégrables à valeurs réelles positives ou nulles 174

3.1.1	Définition	174
3.1.2	Propriétés algébriques	177

3.1.3	Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert	179
-------	---	-----

3.2	Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes	186
3.2.1	Généralités	186
3.2.2	Propriétés	190
3.2.3	Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert	196
3.3	Intégration des relations de comparaison	204
3.3.1	Cas des fonctions intégrables	204
3.3.2	Cas des fonctions non intégrables	205
3.4	Intégrales impropres	206
3.5	Intégrales dépendant d'un paramètre	211
3.5.1	Continuité	211
3.5.2	Dérivation	214
3.5.3	La fonction Γ d'Euler	220
3.6	Intégrales doubles	226
3.6.1	Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux segments	226
3.6.2	Intégrales doubles sur le produit cartésien de deux intervalles	228
3.6.3	Intégrale sur une partie simple du plan	233
	Complément aux exercices	239

Chapitre 4

Séries 241

4.1	Séries à termes dans un evn (1^{re} étude)	242
4.1.1	Généralités	242
4.1.2	Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes	245
4.2	Séries à termes dans \mathbb{R}_+	248
4.2.1	Lemme fondamental	248
4.2.2	Théorèmes de comparaison	248
4.2.3	Séries de Riemann	250
4.2.4	Série géométrique	252
4.4	Séries à termes dans un evn (2^{e} étude)	263
4.3.1	CNS de Cauchy	263
4.3.2	Convergence absolue	265
4.3.3	Séries usuelles dans une algèbre de Banach	268
4.3.4	Espaces $\ell^1(\mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{K})$	270
4.3.5	Séries alternées	272
4.3.6	Exemples d'utilisation d'un développement asymptotique	273
4.3.7	Comparaison d'une série à un intégrale	276
4.3.8	Étude de la somme d'une série	284
4.3.9	Sommation des relations de comparaison	290
4.3.10	Supplément : groupement de termes	293
4.3.11	Séries doubles	296
	Compléments aux exercices	304

Chapitre 5

Suites et séries d'applications 311

5.1	Suites d'applications	312
5.1.1	Convergences	312
5.1.2	Convergence uniforme et limite	317

5.1.3	Convergence uniforme et continuité	318
5.1.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	321
5.1.5	Convergence uniforme et dérivation	324
5.1.6	Convergence d'une suite d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	326
5.2	Approximation des fonctions d'une variable réelle	333
5.2.1	Approximation par des fonctions en escalier ou affines par morceaux et continues	333
5.2.2	Approximation par des polynômes	333
5.2.3	Approximation par des polynômes trigonométriques	342
5.3	Séries d'applications	346
5.3.1	Convergences	346
5.3.2	Convergence uniforme et limite	357
5.3.3	Convergence uniforme et continuité	358
5.3.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	362
5.3.5	Convergence uniforme et dérivation	365
5.3.6	Convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	370
	Compléments aux exercices	372

Chapitre 6

	Séries entières	385
6.1	Rayon de convergence	386
6.1.1	Notion de série entière	386
6.1.2	Rayon de convergence et somme d'une série entière	386
6.1.3	Comparaisons de rayons	390
6.1.4	Règle de d'Alembert	391
6.2	Opérations sur les séries entières	397
6.2.1	Structure vectorielle	397
6.2.2	Dérivation	399
6.2.3	Produit de deux séries entières	400
6.3	Convergence	402
6.4	Régularité de la somme d'une série entière	404
6.5	Développements en série entière	406
6.5.1	Généralités	406
6.5.2	Opérations sur les fonctions développables en série entière	410
6.5.3	DSE(0) usuels	413
6.6	Fonctions usuelles d'une variable complexe	424
6.6.1	L'exponentielle complexe	424
6.6.2	Fonctions circulaires directes	426
6.6.3	Fonctions hyperboliques directes	428
	Compléments aux exercices	430

Chapitre 7

Séries de Fourier

435

7.1	Généralités	436
7.1.1	Ensemble \mathcal{CM}_T	436
7.1.2	Coefficients de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T	437
7.1.3	Série de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T	441
7.2	Structure préhilbertienne	443
7.2.1	Espace préhilbertien \mathcal{D}_T	443
7.2.2	Famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	445
7.2.3	Le théorème de Parseval	445
7.3	Convergence ponctuelle	450
7.3.1	Convergence normale	450
7.3.2	Le théorème de Dirichlet	451
7.4	Exemples	454
	Compléments aux exercices	460

Chapitre 8

Équations différentielles (2^{ème} étude)

463

8.1	Généralités	464
8.1.1	Définitions	464
8.1.2	Remplacement théorique d'une équation différentielle d'ordre n par une équation différentielle d'ordre 1	465
8.1.3	Équations différentielles autonomes	466
8.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	468
8.2.1	Théorie	468
8.2.2	Exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz	479
8.3	Systèmes différentiels linéaires du 1 ^{er} ordre	490
8.3.1	Généralités	490
8.3.2	Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout l'intervalle I	492
8.3.3	Structures de \mathcal{S}_0 et de \mathcal{S}	495
8.3.4	Résolution de (E_0)	496
8.3.5	Résolution de (E)	498
8.3.6	Systèmes différentiels linéaires du 1 ^{er} ordre à coefficients constants	500
8.3.7	Systèmes différentiels autonomes linéaires	508
8.4	Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre	513
8.4.1	Généralités	513
8.4.2	Résolution de (E_0)	515
8.4.3	Résolution de (E)	516
8.4.4	Problème des raccords	518
8.4.5	Utilisation de séries entières	521

Chapitre 9

Fonctions de plusieurs variables réelles (2^{ème} étude)

527

9.1	Dérivées partielles premières	529
9.1.1	Définitions	529
9.1.2	Applications de classe C^1 sur un ouvert	531
9.1.3	Différentielle d'une application de classe C^1	532
9.1.4	Différentiabilité	539
9.1.5	Inégalité des accroissements finis	543
9.1.6	C^1 -difféomorphismes	546
9.1.7	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre	553
9.2	Dérivées partielles successives	557
9.2.1	Définition	557
9.2.2	Applications de classe C^k sur un ouvert	558
9.2.3	Interversion des dérivations	559
9.2.4	C^k -difféomorphismes	561
9.2.5	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre ≥ 2	563
9.3	Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles	567
9.3.1	Définitions	567
9.3.2	Étude à l'ordre 1	567
9.3.3	Étude à l'ordre 2	568
9.3.4	Extremums globaux	574
9.4	Fonctions implicites	577
9.5	Formes différentielles	580
9.5.1	Définition	580
9.5.2	Formes différentielles exactes	580
9.5.3	Formes différentielles fermées	581
	Complément aux exercices	584

Deuxième partie

Indications et réponses des exercices

Chap. 1, **589** ; Chap. 2, **623** ; Chap. 3, **641** ; Chap. 4, **687** ; Chap. 5, **727** ;
Chap. 6, **799** ; Chap. 7, **833** ; Chap. 8, **853** ; Chap. 9, **875**.

Index des notations 901

Index alphabétique 903

Jean-Marie Monier

4^e édition

ANALYSE MP

Cours et 1 000 exercices corrigés

Cette 4^e édition du *cours d'analyse* de Jean-Marie Monier est entièrement conforme aux nouveaux programmes 2004 de la filière MP. Elle propose un cours complet, convivial et rigoureux, et de très nombreux exercices tous corrigés.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1^{er} cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

JEAN-MARIE MONIER
est professeur en classe
de Spéciales au lycée
La Martinière-Monplaisir
à Lyon.

COURS		EXERCICES		
1 ^{re} année	2 ^e année	1 ^{re} année	2 ^e année	
Analyse MPSI	Analyse MP	Analyse MPSI	Analyse MP	MPSI MP
Algèbre MPSI	Algèbre MP	Algèbre et géométrie MPSI	Algèbre et géométrie MP	
Géométrie MPSI, MP				
Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	PCSI-PTSI PC-PSI-PT
Algèbre PCSI-PTSI	Algèbre PC-PSI-PT	Algèbre et géométrie PCSI-PTSI	Algèbre et géométrie PC-PSI-PT	
Géométrie PCSI-PTSI, PC-PSI-PT				
DÉKHÔLLEZ				
Niveau X, Centrale, Mines		Niveau CCP, e3a, e4a, ESIM		
337 exercices corrigés		409 exercices corrigés		MP-MP*
264 exercices corrigés		324 exercices corrigés		PC-PC*-PSI-PSI*-PT-PT*

