

S. GODOUNOV, V. RIABENKI

# SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES



**OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES**

*1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)*

S. GODOUNOV, V. RIABENKI

# SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES

Introduction  
à la théorie

M 70  
2332  $\frac{1}{10}$



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)

## TABLE DES MATIÈRES

|                    |    |
|--------------------|----|
| Préface .....      | 11 |
| Introduction ..... | 13 |

### *Première partie*

#### ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES ORDINAIRES

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Chapitre premier. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE. EXEMPLES DE SCHEMAS AUX DIFFÉRENCES .....</b>  | <b>17</b> |
| §1. Equations aux différences simples .....  | 17        |
| 1. Equations aux différences (17). 2. Ordre d'une équation aux différences (19). 3. Solution générale d'une équation aux différences (20).   |           |
| Exercices .....  | 22        |
| §2. Equation aux différences du premier ordre .....  | 22        |
| 1. Solution fondamentale (23). 2. Condition de borne de la solution fondamentale (24). 3. Solution particulière (24).  |           |
| Exercices .....  | 26        |
| §3. Equation aux différences du second ordre .....   | 26        |
| 1. Solution générale de l'équation homogène (27). 2. Solution générale de l'équation non homogène. Solution fondamentale (30). 3. Evaluation de la solution fondamentale par les coefficients de l'équation aux différences (34).  |           |
| Exercices .....  | 35        |
| <b>Chapitre 2. PROBLÈME AUX LIMITES POUR UNE ÉQUATION DU SECOND ORDRE</b>  | <b>38</b> |
| §4. Position du problème. Critères de bon conditionnement .....  | 38        |
| 1. Position du problème (38). 2. Notion de bon conditionnement (39). 3. Critère suffisant de bon conditionnement (40). 4. Critère de bon conditionnement d'un problème aux limites à coefficients constants (41). 5. Critère de bon conditionnement d'un problème à coefficients variables (42). 6. Justification du critère de bon conditionnement d'un problème aux limites à coefficients constants (43). 7. Problèmes aux limites généraux pour des systèmes d'équations aux différences (47). |           |
| Exercices .....  | 49        |

|   |           |
|---|-----------|
| §5. Balayage .....  | 50        |
| 1. Description (50). 2. Exemple d'algorithme numériquement instable (52).   |           |
| Exercices .....   | 53        |
| <b>Chapitre 3. JUSTIFICATION DE LA MÉTHODE DU BALAYAGE .....</b>  | <b>55</b> |
| §6. Propriétés des problèmes aux limites bien conditionnés .....  | 55        |
| 1. Evaluation des solutions d'un problème aux limites à coefficients perturbés (55). 2. Démonstration du critère de bon conditionnement (58). |           |
| 3. Propriétés des problèmes bien conditionnés (62).   |           |
| §7. Justification de la méthode du balayage pour des problèmes aux limites bien conditionnés .....  | 63        |
| 1. Evaluation des coefficients de balayage (63). 2. Influence des erreurs d'arrondi sur le résultat (65).                                     |           |

### *Deuxième partie*

## SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Chapitre 4. EXEMPLES ÉLÉMENTAIRES DE SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES .....</b>   | <b>68</b> |
| §8. Notions d'ordre de précision et d'approximation .....   | 68        |
| 1. Ordre de précision d'un schéma aux différences (68). 2. Vitesse de convergence de la solution d'une équation aux différences (71). 3. Ordre d'approximation (73).  |           |
| §9. Un schéma aux différences instable .....  | 74        |
| 1. Procédés d'approximation d'une dérivée (74). 2. Exemple de schéma aux différences instable (74).   |           |
| <b>Chapitre 5. CONVERGENCE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES, CONSÉQUENCE DE L'APPROXIMATION ET DE LA STABILITÉ .....</b>   | <b>77</b> |
| §10. Convergence d'un schéma aux différences .....  | 77        |
| 1. Réseau et fonction définie sur un réseau (77). 2. Schémas aux différences convergents (82). 3. Vérification de la convergence d'un schéma aux différences (84).  |           |
| Exercices .....   | 86        |
| §11. Approximation d'un problème aux limites différentiel par un schéma aux différences .....   | 86        |
| 1. Résidu $\delta f^{(h)}$ (86). 2. Calcul du résidu (88). 3. Approximation de l'ordre de $h^k$ (90). 4. Exemples (90). 5. Décomposition d'un schéma aux différences en sous-systèmes (93). 6. Remplacement des dérivées par des rapports aux différences (95). 7. D'autres méthodes de construction de schémas aux différences (97). |           |
| Exercice .....  | 97        |
| §12. Définition de la stabilité d'un schéma aux différences. Convergence en tant que conséquence de l'approximation et de la stabilité .....  | 98        |
| 1. Définition de la stabilité (98). 2. Relation entre l'approximation, la stabilité et la convergence (100). 3. Schéma aux différences convergent pour une équation intégrale (105).  |           |
| §13. Choix des normes .....   | 106       |
| §14. Critère suffisant de stabilité des schémas aux différences pour le problème de Cauchy .....  | 113       |

|  |            |
|--|------------|
| 1. Exemple préliminaire (113). 2. Schéma aux différences sous forme canonique (114). 3. Stabilité en tant que borne des normes des puissances de $R_h$ (116). 4. Exemples d'étude de la stabilité (117). 5. Non-unicité de l'écriture canonique (122). |            |
| Exercices .....  | 123        |
| §15. Critère spectral nécessaire de stabilité .....  | 124        |
| 1. Une condition nécessaire de stabilité est que les normes des puissances de l'opérateur $R_h$ soient bornées (125). 2. Critère spectral de stabilité (126). 3. Discussion du critère spectral de stabilité (127).                                    |            |
| Exercices .....  | 131        |
| §16. Erreurs d'arrondi .....   | 131        |
| 1. Erreurs sur les coefficients (131). 2. Erreurs de calcul (134).   |            |
| §17. Caractérisation quantitative de la stabilité .....  | 135        |
| §18. Un procédé d'étude de la stabilité des problèmes non linéaires .....  | 141        |
| <b>Chapitre 6. SCHEMAS AUX DIFFERENCES USUELS .....</b>  | <b>143</b> |
| §19. Schémas de Runge-Kutta et d'Adams .....   | 143        |
| 1. Schémas de Runge-Kutta (143). 2. Schémas d'Adams (145). 3. Remarques sur la stabilité (148). 4. Généralisation à des systèmes d'équations (149).  |            |
| §20. Méthodes de résolution des problèmes aux limites .....  | 151        |
| 1. Méthode du tir (151). 2. Méthode du balayage (153). 3. Méthode de Newton (154).   |            |

### *Troisième partie*

## SCHEMAS AUX DIFFERENCES POUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES. NOTIONS FONDAMENTALES

|   |            |
|---|------------|
| <b>Chapitre 7. PROCÉDÉS SIMPLES DE CONSTRUCTION ET D'ÉTUDE DE SCHEMAS AUX DIFFERENCES .....</b>   | <b>155</b> |
| §21. Rappels et illustration des définitions principales .....  | 155        |
| 1. Convergence (155). 2. Approximation (156). 3. Stabilité (159).   |            |
| Exercices .....   | 165        |
| §22. Procédés simples de construction de schémas aux différences approxi-<br>mants .....  | 166        |
| 1. Remplacement des dérivées par des rapports aux différences (166).<br>2. Méthode des coefficients indéterminés (172). 3. Schémas de prédiction-<br>correction (181).  |            |
| Exercices .....   | 182        |
| §23. Exemples de construction de conditions aux limites .....   | 183        |
| Exercices .....   | 188        |
| §24. Condition nécessaire de convergence de Courant, Friedrichs et Lewy ....  | 189        |
| 1. Condition de Courant, Friedrichs et Lewy (189). 2. Exemples de schémas<br>aux différences pour le problème de Cauchy (190). 3. Exemples de schémas<br>aux différences pour le problème de Dirichlet (195). |            |
| Exercices .....   | 197        |
| <b>Chapitre 8. CERTAINS GRANDS PROCÉDÉS D'ÉTUDE DE LA STABILITÉ .....</b>   | <b>198</b> |
| §25. Analyse spectrale du problème de Cauchy aux différences .....  | 198        |
| 1. Stabilité relativement aux données initiales (198). 2. Condition spectrale   |            |

|  |     |
|--|-----|
| nécessaire de stabilité (199). 3. Exemples (201). 4. Représentation intégrale d'une solution (208). 5. Lissage de la solution d'un problème aux différences en tant qu'effet de la viscosité d'approximation (212).  |     |
| Exercices .....  | 214 |
| §26. Principe des coefficients fixés .....   | 215 |
| 1. Fixation des coefficients aux points intérieurs (215). 2. Critère de Babenko et Guelfand (218).   |     |
| Exercices .....  | 223 |
| §27. Solutions de certains problèmes modèles sous forme des séries finies de Fourier .....   | 224 |
| 1. Séries de Fourier pour des fonctions définies sur un réseau (224). 2. Représentation des solutions de schémas aux différences pour l'équation de la chaleur sur un segment (227). 3. Représentation des solutions de schémas aux différences pour le problème plan de la chaleur (230). 4. Représentation de la solution d'un schéma aux différences pour le problème des cordes vibrantes (232). |     |
| Exercices .....  | 234 |
| §28. Principe du maximum .....   | 235 |
| 1. Schéma aux différences explicite (235). 2. Schéma aux différences implicite (237). 3. Comparaison des schémas aux différences explicite et implicite (238).   |     |
| <b>Chapitre 9. LES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES ET LE CALCUL DES SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES</b> .....   | 239 |
| §29. Solution généralisée .....  | 239 |
| 1. Apparition des discontinuités (240). 2. Définition d'une solution généralisée (241). 3. Condition sur la ligne de discontinuité de la solution (242). 4. Suppression d'une discontinuité (244). 5. Autre définition d'une solution généralisée (245).   |     |
| §30. Construction de schémas aux différences .....   | 246 |
| 1. Schéma avec viscosité artificielle (247). 2. Méthode des caractéristiques (247). 3. Schémas aux différences conservatifs (248).   |     |

#### *Quatrième partie*

### PROBLÈMES À DEUX VARIABLES D'ESPACE

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chapitre 10. NOTION DE SCHÉMAS DE DÉCOMPOSITION AUX DIFFÉRENCES</b> .....  | 254 |
| §31. Construction de schémas de décomposition .....   | 254 |
| Exercices .....   | 258 |
| §32. Schémas aux différences économiques .....  | 258 |
| Exercices .....   | 265 |
| §33. Décomposition suivant les facteurs physiques .....   | 265 |
| <b>Chapitre 11. PROBLÈMES ELLIPTIQUES</b> .....   | 266 |
| §34. Un schéma aux différences très simple pour le problème de Dirichlet ....   | 266 |
| 1. Approximation (266). 2. Stabilité (267).   |     |
| Exercices .....   | 270 |
| §35. Méthode de stationnarisation .....   | 271 |
| 1. Idée de la méthode (271). 2. Analyse d'un schéma de stationnarisation explicite (273). 3. Schéma de directions alternées (276). 4. Choix de la |     |

|   |     |
|---|-----|
| précision (277). 5. Limites d'applicabilité des méthodes (278).   |     |
| Exercices .....   | 278 |
| §36. Itérations à pas variable .....  | 279 |
| 1. Idée de Richardson (279). 2. Ensemble de paramètres de Tchebycheff (279). 3. Numérotation des paramètres d'itération. (282). 4. Méthode de Douglas-Rachford (285). |     |
| Exercices .....   | 288 |
| §37. Méthode de Fédorenko .....   | 288 |
| 1. Idée de la méthode (289). 2. Description de l'algorithme (290).  |     |

### *Cinquième partie*

## STABILITÉ DES PROBLÈMES AUX LIMITES AUX DIFFÉRENCES ÉVOLUTIFS EN TANT QUE BORNE DES NORMES DES PUISSANCES D'UN OPÉRATEUR

|  |     |
|--|-----|
| <b>Chapitre 12. CONSTRUCTION DE L'OPÉRATEUR DE PASSAGE</b> .....   | 293 |
| §38. Structure stratifiée des solutions des problèmes évolutifs .....  | 293 |
| Exercices .....  | 296 |
| §39. Ecriture des problèmes aux limites aux différences sous forme $u^{p+1} = R_h u^p + \tau Q^p$ .....  | 296 |
| 1. Forme canonique (296). 2. Stabilité en tant que borne uniforme des normes des puissances de l'opérateur $R_h$ (299). 3. Exemple (302).  |     |
| Exercices .....  | 304 |
| §40. Utilisation des solutions particulières pour construire l'opérateur de passage .....  | 305 |
| §41. Certains procédés d'évaluation des normes des puissances d'opérateurs ..  | 315 |
| 1. Conditions spectrales nécessaires pour que $\ R_h^p\ $ soient bornés (316). 2. Critère spectral de puissances bornées d'un opérateur auto-adjoint (317). 3. Critères de $R_h$ auto-adjoint (318). 4. Evaluation des valeurs propres de l'opérateur $R_h$ (319). 5. Choix du produit scalaire (320). 6. Critères de stabilité de Samarski (321). |     |
| Exercice .....   | 323 |
| <b>Chapitre 13. CRITÈRE SPECTRAL DE STABILITÉ DES PROBLÈMES AUX LIMITES ÉVOLUTIFS NON AUTO-ADJOINTS</b> .....  | 324 |
| §42. Spectre d'une famille d'opérateurs $\{R_h\}$ .....  | 324 |
| 1. Nécessité de perfectionner le critère spectral de stabilité (324). 2. Spectre d'une famille d'opérateurs (définition) (326). 3. Condition nécessaire de stabilité (326). 4. Notion de spectre de la famille d'opérateurs $\{R_h\}$ (discussion) (327). 5. Le critère nécessaire de stabilité est proche d'un critère suffisant (329).           |     |
| §43. Algorithme de calcul du spectre d'une famille d'opérateurs aux différences pour les fonctions définies sur un segment maillé .....  | 331 |
| 1. Exemple caractéristique (331). 2. Algorithme de calcul du spectre dans le cas général (337).  |     |
| Exercices .....  | 338 |
| §44. Noyaux des spectres des familles d'opérateurs .....   | 338 |
| §45. Sur la stabilité des algorithmes itératifs de résolution d'équations aux différences non auto-adjointes .....   | 341 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Annexe. MÉTHODE DES CONDITIONS AUX LIMITES INTRINSÈQUES</b> .....  | 344 |
| 1. Classe de systèmes d'équations aux différences (344). 2. Solution fondamentale (345). 3. Frontière d'un domaine discrétisé (345). 4. Analogues aux différences des formules intégrales de Cauchy et du type de Cauchy (346). 5. Conditions aux limites intrinsèques (347). 6. Opérateur projection frontière (348). 7. Problème aux limites général (348). 8. Idée à la base de la méthode des conditions aux limites intrinsèques (348). 9. Stabilité des conditions aux limites intrinsèques (348). 10. Une idée supplémentaire (349). 11. Comparaison de la méthode des conditions aux limites intrinsèques avec la méthode des équations intégrales singulières (351). |     |
| Commentaires .....  | 353 |
| Bibliographie .....   | 358 |
| Index .....   | 359 |