

MONOGRAPHIES UNIVERSITAIRES DE MATHÉMATIQUES
DIRECTEUR : HENRI HIERCHE

28

Y. CHOQUET-BRUHAT

**géométrie
différentielle
et
systèmes
extérieurs**

DUNOD

Chadwick

M. 44 - 13

MONOGRAPHIES UNIVERSITAIRES DE MATHÉMATIQUES

M^{me} Y. CHOQUET-BRUHAT
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET SYSTÈMES EXTÉRIEURS

PRÉFACE DE

A. LICHNEROWICZ
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

I. 74¹/₁

DUNOD
PARIS
1968

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| CHAPITRE I. — Variétés différentiables. Fibrés vectoriels. | 1 |
| A) Variétés différentiables. | 2 |
| 1. Rappels de Topologie générale. | 2 |
| 2. Espaces de Banach (Rappels). | 3 |
| 3. Variété. | 5 |
| 4. Application différentiable d'une variété différentiable dans une autre. | 9 |
| 5. Produit direct de variétés différentiables. | 10 |
| 6. Groupe de Lie. | 11 |
| 7. Sous-variétés et plongements. | 11 |
| B) Champs de vecteurs. | 17 |
| 8. Vecteurs tangents. | 17 |
| 9. Espace vectoriel tangent. | 19 |
| 10. Champs de vecteurs. | 21 |
| 11. Structure fibrée de $E(V_n)$ | 22 |
| 12. Espace fibré $E(V_n)$ des vecteurs tangents à une variété différentiable V_n | 23 |
| 13. Propriétés des champs de vecteurs. | 24 |
| 14. Image d'un vecteur par une application différentiable. Différentielle d'une application. | 26 |
| 15. Vecteurs covariants. | 28 |
| 16. Champ de vecteurs covariants. | 29 |
| C) Tenseurs. | 30 |
| 17. Tenseurs en un point. | 30 |
| 18. Tenseurs contravariants. | 31 |
| 19. Tenseurs mixtes. | 32 |
| 20. Algèbre tensorielle. | 32 |
| 21. Contraction. | 33 |
| 22. Tenseurs symétriques et antisymétriques. | 34 |
| 23. Champs de tenseurs. | 36 |
| 24. Image d'un champ de tenseurs par une application différentiable f de V_n dans W_p | 37 |
| D) Compléments. | 38 |
| 25. Variétés différentiables de dimension infinie. | 38 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CHAPITRE II. — Formes différentielles extérieures. Intégration..... | 54 |
| A) Algèbre extérieure. Différentielle extérieure | 55 |
| 1. Définition des formes différentielles extérieures..... | 55 |
| 2. Algèbre extérieure..... | 55 |
| 3. Base et composantes strictes de l'algèbre extérieure d'ordre p dans le domaine d'une carte..... | 56 |
| 4. Transformée d'une forme différentielle par une application différentiable | 58 |
| 5. Différentiation extérieure..... | 59 |
| 6. Propriétés globales..... | 63 |
| B) Intégration des formes différentielles..... | 66 |
| 7. Orientation..... | 66 |
| 8. Partition de l'Unité..... | 67 |
| 9. Intégration d'une forme différentielle de degré n sur une variété de dimension n « orientée »..... | 69 |
| 10. Calcul pratique des intégrales multiples sur les variétés simples usuelles | 72 |
| C) Formule de Stokes..... | 74 |
| 11. La formule de Stokes..... | 74 |
| 12. Formule de Stokes pour un pavé P de R_p | 77 |
| 13. Formule de Stokes pour une chaîne..... | 78 |
| 14. Formule de Stokes pour une variété à bord..... | 79 |
| D) Compléments | 81 |
| 15. Théorèmes de De Rham..... | 81 |
| 16. Homologie compacte..... | 84 |
| CHAPITRE III. — Variétés riemanniennes..... | 89 |
| A) Définitions | 89 |
| 1. Définition | 89 |
| 2. Correspondance canonique entre tenseurs contravariants et covariants | 90 |
| 3. Élément de volume. Formes adjointes..... | 92 |
| 4. Variétés proprement riemanniennes. Groupe orthogonal..... | 93 |
| 5. Variétés hyperboliques. Groupe de Lorentz..... | 94 |
| 6. Existence de structures riemanniennes sur une variété paracompacte..... | 100 |
| 7. Métrique induite..... | 103 |
| 8. Isométries..... | 105 |
| B) Géodésiques | 108 |
| 9. Introduction..... | 108 |
| 10. Equations d'Euler..... | 109 |
| 11. Intégrale première de l'énergie..... | 111 |
| 12. Equations différentielles des géodésiques d'une variété riemannienne..... | 112 |
| 13. Existence locale. Coordonnées normales géodésiques..... | 114 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 14. Variété riemannienne géodésiquement complète..... | 116 |
| 15. Variétés proprement riemanniennes..... | 117 |
| 16. Variétés hyperboliques..... | 120 |
| C) Compléments. Spineurs..... | 125 |
| 17. Introduction..... | 125 |
| 18. Algèbre de Clifford et Groupe spinoriel..... | 126 |
| 19. Spineurs sur un espace vectoriel..... | 129 |
| 20. Spineurs sur une variété riemannienne..... | 130 |
| CHAPITRE IV. — Groupes de transformations différentiables..... | 137 |
| A) | 137 |
| 1. Rappel sur les équations différentielles dans un espace vectoriel normé | 137 |
| 2. Groupe à un paramètre..... | 139 |
| 3. Transformations infinitésimales..... | 140 |
| 4. Dérivées de Lie..... | 143 |
| 5. Champs de tenseurs invariant par un groupe local à un paramètre de difféomorphismes..... | 150 |
| 6. Groupes de Lie de transformations différentiables de V_n | 153 |
| 7. Cas où V_n est un groupe de Lie. Algèbre de Lie..... | 154 |
| 8. Formes différentielles invariantes sur un groupe de Lie G | 156 |
| 9. Sous-groupes à un paramètre d'un groupe de Lie..... | 159 |
| 10. Coordonnées canoniques dans un voisinage de e | 161 |
| 11. Champ de tenseurs invariant par un groupe de Lie de transformations différentiables..... | 164 |
| 12. Propriétés des vecteurs de Killing..... | 164 |
| B) <i>Invariants intégraux</i> | 166 |
| 13. Forme différentielle invariante pour les trajectoires d'un système différentiel | 166 |
| 14. Invariant intégral absolu..... | 170 |
| 15. Système différentiel admettant une transformation infinitésimale... .. | 172 |
| C) <i>Compléments. Opérateurs différentiels invariants sur un groupe de Lie</i> | 173 |
| 16. Opérateurs différentiels sur une variété..... | 173 |
| 17. Opérateur différentiel invariant par un difféomorphisme..... | 174 |
| 18. Cas où V_n est un groupe de Lie..... | 176 |
| 19. Détermination d'un groupe de Lie par son algèbre de Lie..... | 178 |
| CHAPITRE V. — Systèmes différentiels extérieurs..... | 187 |
| A) <i>Généralités</i> | 187 |
| 1. Système d'équations extérieures..... | 187 |
| 2. Systèmes différentiels extérieurs..... | 188 |
| 3. Systèmes différentiels fermés | 189 |
| B) <i>Systèmes de Pfaff</i> | 189 |
| 4. Définition | 189 |
| 5. Systèmes de Pfaff complètement intégrables..... | 191 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6. Théorème de Frobenius..... | 192 |
| 7. Un système de Pfaff est dit complètement intégrable sur une variété V_n si..... | 196 |
| 8. Point de vue dual..... | 196 |
| C) <i>Systèmes différentiels extérieurs</i> | 198 |
| 9. Espace associé d'une forme extérieure..... | 198 |
| 10. Construction de l'espace Q^* associé à une forme extérieure ω | 199 |
| 11. Système associé d'une forme différentielle extérieure..... | 201 |
| 12. Système associé d'un système de formes extérieures..... | 202 |
| 13. Système associé d'un système différentiel extérieur..... | 205 |
| 14. Variétés caractéristiques..... | 209 |
| D) <i>Equations aux dérivées partielles du premier ordre</i> | 210 |
| 15. La résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans R_n | 210 |
| 16. Problème de Cauchy..... | 212 |
| 17. Cas de l'espace R_3 | 216 |
| 18. Cas des équations quasi linéaires..... | 217 |
| 19. Cas des équations homogènes de degré 1..... | 219 |
| 20. Equations linéaires homogènes..... | 220 |
| CHAPITRE VI. — Connexions | 228 |
| A) <i>Connexions linéaires. Première définition</i> | 229 |
| 1. Définition d'une connexion linéaire. Différentielle absolue d'un champ de vecteur..... | 229 |
| 2. Parallélisme..... | 231 |
| 3. Différentielle d'un vecteur covariant..... | 233 |
| 4. Différentielle absolue d'un tenseur..... | 235 |
| 5. Torsion d'une connexion linéaire..... | 237 |
| 6. Courbure d'une connexion linéaire..... | 239 |
| 7. Identités satisfaites par courbure et torsion..... | 240 |
| 8. Connexion riemannienne..... | 242 |
| 9. Géodésiques d'une variété riemannienne..... | 244 |
| 10. Courbure d'une connexion riemannienne. Identités..... | 245 |
| 11. Opérateurs différentiels sur une variété riemannienne..... | 246 |
| 12. Espaces plats..... | 250 |
| B) <i>Connexions sur un espace fibré principal</i> | 251 |
| 13. Espace fibré principal $L(V_n)$ | 252 |
| 14. Définition et propriétés des espaces fibrés principaux..... | 252 |
| 15. Application linéaire définissant une connexion..... | 254 |
| 16. Transport parallèle dans $P(V_n)$ | 255 |
| 17. Sous-espaces horizontaux et verticaux..... | 255 |
| 18. Forme de connexion..... | 256 |
| 19. Existence de connexions sur un espace fibré principal de base V_n paracompacte..... | 257 |
| 20. Forme de courbure..... | 258 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C) <i>Connexions linéaires. Deuxième définition</i> | 260 |
| 21. Définition | 260 |
| 22. Traduction en coordonnées locales..... | 261 |
| 23. Tenseurs de courbure et de torsion..... | 264 |
| 24. Transport parallèle dans $E(V_n)$ | 267 |
| 25. Dérivation covariante..... | 267 |
| 26. Différentielle absolue d'un vecteur covariant..... | 268 |
| 27. Transport parallèle et différentielle absolue des tenseurs..... | 269 |
| 28. Traduction en coordonnées locales..... | 270 |
| 29. Connexion riemannienne..... | 271 |
| CHAPITRE VII. — Applications aux sciences physiques | 280 |
| A) <i>Mécanique analytique classique</i> | 281 |
| 1. Structure géométrique de l'espace-temps V_4 de Galilée-Newton.... | 281 |
| 2. Cinétique | 283 |
| 3. Loi fondamentale de la dynamique..... | 284 |
| 4. Systèmes à un nombre fini de degrés de liberté..... | 285 |
| 5. Systèmes holonomes à liaisons parfaites — Equations de Lagrange..... | 286 |
| 6. Equations d'Hamilton..... | 290 |
| 7. Principes variationnels..... | 292 |
| 8. Interprétations riemanniennes..... | 293 |
| 9. Invariant intégral de la dynamique..... | 294 |
| 10. Transformations canoniques..... | 295 |
| 11. Equation de Jacobi..... | 297 |
| B) <i>Relativité restreinte</i> | 298 |
| 12. Espace-temps de Minkovski..... | 299 |
| 13. Dynamique du point en relativité restreinte..... | 301 |
| C) <i>Electromagnétisme</i> | 305 |
| 14. Equations de Maxwell..... | 305 |
| 15. Forme intrinsèque des équations de Maxwell dans les milieux non inductifs | 307 |
| 16. Champ électromagnétique sur une variété hyperbolique..... | 309 |
| 17. Tenseur de Maxwell..... | 310 |
| 18. Invariance du champ électromagnétique par un système différentiel..... | 311 |
| 19. Champ électromagnétique singulier..... | 313 |
| 20. Equations d'onde..... | 314 |
| D) <i>Relativité générale et mécanique des fluides relativistes</i> | 316 |
| 21. Relativité générale | 316 |
| 22. Mécanique des fluides relativistes | 317 |
| 23. Théorie relativiste de la gravitation | 320 |
| <i>Bibliographie sommaire</i> | 323 |
| Index..... | 325 |

COLLECTION « TRAVAUX ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES »

GÉOMÉTRIE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS

PAR

A. LICHNEROWICZ

204 pages 16 × 25. 1958. Relié toile sous jaquette 28 F (28,79 F)

INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

PAR

S. LANG

Columbia University, New York

TRADUIT DE L'AMÉRICAIN PAR

J. ROGALSKI

Assistante à la Faculté des sciences de Paris

144 pages 16 × 25. 1967. Broché 18 F (18,51 F)

DUNOD

ÉDITEUR, 92, RUE BONAPARTE - PARIS-6^e - 326-99-15