

A. DONEDDU

**mathématiques
supérieures et spéciales
mp1,mp2**



**compléments
de géométrie
algébrique**

3

DUNOD

M.669

MATHÉMATIQUES
SUPÉRIEURES ET SPÉCIALES



3 COMPLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE
ALGÈBRIQUE

BIBLIOTHÈQUE COMMUNALE
TIZI-OUZOU

*Mathématiques supérieures
et spéciales — M P 1 et M P 2*

A. DONEDDU

Agrégé des Sciences mathématiques
Professeur de Mathématiques supérieures
au Lycée Condorcet à Paris

Reinventato 1/7
N° de cote: [blacked out]

Université "Mouloud MAMMERI"
Faculté des Sciences
Bibliothèque Département T.C.T

DUNOD PARIS

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. — <i>Géométrie affine</i>	1
1,1. Prologue	1
1,2. Espaces vectoriels	2
1,3. Applications linéaires	4
1,4. Espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E, F)$ et anneau $\mathcal{L}_K(E)$	5
1,5. Projecteurs	6
1,6. Vecteurs propres. Valeurs propres	7
1,7. Variétés linéaires	8
1,8. Applications affines	11
1,9. Droites et hyperplans	17
1,10. Plans vectoriels et affines	23
Exercices	28
 CHAPITRE 2. — <i>Géométrie projective</i>	 34
2,1. Espace projectif	34
2,2. Variétés linéaires projectives	36
2,3. Hyperplans projectifs	41
2,4. Applications linéaires projectives	44
2,5. Le groupe projectif	47
2,6. Repères projectifs	50
2,7. Droite projective. Birapport	56
Exercices	59
 CHAPITRE 3. — <i>Compléments sur les Géométries affines et projectives</i>	 63
3,1. Dualité dans les espaces projectifs	63
Faisceaux linéaires d'hyperplans	64
Birapport de quatre hyperplans d'un faisceau	65
Dualité dans les espaces projectifs de dimension finie	68
3,2. Liaison entre Géométries affine et projective	70
Complétion projective d'un espace affine	73
Liaison entre variétés affines et projectives	75
Liaison entre bijections affines et homographies	78
3,3. Homographies de la droite projective	82
Homographies de la droite à deux points invariants distincts	83
Homographies de la droite à un unique point invariant	85
Homographies involutives	86
Exercices	88

CHAPITRE 4. — <i>Géométrie euclidienne</i>	93
4,1. Structure d'espace euclidien	93
4,2. Norme. Distance	95
4,3. Sous-espaces orthogonaux	99
Hyperplan orthogonal à une droite donnée	100
Distance d'un point à une droite, à un hyperplan	101
Distance de deux hyperplans parallèles	103
Distance de deux droites parallèles	104
4,4. Isométries. Similitudes	105
Groupe orthogonal	105
Isométries affines	106
Similitudes	107
Similitudes affines	108
4,5. Espaces euclidiens de dimension finie	108
Base orthogonale. Base orthonormale	108
Droite orthogonale à un hyperplan	110
4,6. Matrices orthogonales	112
Endomorphie adjointe	112
Caractérisation des similitudes et isométries	113
Groupe $O(n, \mathbf{R})$	114
Exercices	115
CHAPITRE 5. — <i>Formes bilinéaires et formes quadratiques</i>	123
5,1. Formes bilinéaires	123
5,2. Bidual d'un espace vectoriel	127
5,3. Formes bilinéaires symétriques	129
5,4. Formes quadratiques	131
5,5. Orthogonalité	134
5,6. Noyau. Éléments isotropes	136
Noyau d'une forme bilinéaire	136
Forme bilinéaire non dégénérée	136
Vecteur isotrope	137
Sous-espace isotrope	138
5,7. Formes bilinéaires sur les espaces de dimension finie	138
5,8. Bases orthogonales. Bases orthonormales	142
Existence de base orthogonale	142
Rang d'une forme bilinéaire	143
Bases orthonormales	145
Exercices	147
CHAPITRE 6. — <i>Formes bilinéaires réelles. Complexification</i>	152
6,1. Formes bilinéaires réelles	152
Forme bilinéaire symétrique positive	152
Inégalité de Schwarz	154
Inégalité de Minkowski	154
Espace euclidien	155
6,2. Décomposition d'une forme quadratique	155
Décomposition en carrés	156
6,3. Loi d'inertie	163
Signature d'une forme quadratique	165

6,4.	Complexification	166
	Complexifié \hat{E} de l'espace réel E	166
	Immersion de E dans \hat{E}	167
	Prolongement à \hat{E} des endomorphismes de E	169
	Prolongement à \hat{E} d'une forme bilinéaire sur E	170
6,5.	Complexification d'un espace euclidien	173
	Prolongement du produit scalaire	173
	Prolongement des isométries de E	174
	Exercices	174
CHAPITRE 7. — <i>Formes hermitiennes</i>		180
7,1.	Formes sesquilinéaires	180
7,2.	Formes hermitiennes	183
	Matrices hermitiennes	184
7,3.	Formes hermitiennes non dégénérées	184
	Noyau d'une forme hermitienne	185
	Caractérisation des formes non dégénérées	185
	Vecteurs et sous-espaces isotropes	186
7,4.	Bases orthogonales. Bases orthonormales	187
	Existence de bases orthogonales	188
	Rang d'une forme hermitienne	188
	Bases orthonormales	189
7,5.	Formes hermitiennes positives	191
	Inégalité de Schwarz	191
	Inégalité de Minkowski	192
	Caractérisation des formes positives non dégénérées	192
	Espace préhilbertien et produit scalaire hermitien	193
	Théorème de Pythagore	194
7,6.	Endomorphie adjointe	194
	Représentation matricielle	196
7,7.	Groupe unitaire	198
	Espace préhilbertien de dimension finie	199
7,8.	Diagonalisation des endomorphismes auto-adjointes	200
	Sous-espaces propres	201
	Bases orthonormales de vecteurs propres	202
	Exercices	205
CHAPITRE 8. — <i>Coniques et quadriques en Géométrie projective</i>		210
8,1.	Hyperquadriques dans un espace projectif	210
	Points conjugués par rapport à une hyperquadrique	211
	Variétés conjuguées	211
	Variété polaire d'une variété projective	212
	Hyperplan polaire d'un point	213
	Intersection d'une hyperquadrique et d'une droite	213
	Hyperplan tangent en un point	215
8,2.	Dualité	216
	Dualité dans les espaces de dimension finie	216
	Equation tangentielle	217
8,3.	Coniques dans le plan projectif	218
	Equation d'une conique	219

8,4.	Conjugaison	221
	Points doubles	221
	Polaire d'un point	222
	Intersection d'une conique et d'une droite	224
	Tangentes à une conique propre passant par un point	226
8,5.	Dualité relative à une conique	226
	Equation tangentielle d'une conique propre	228
	Transformation par polaires réciproques	230
	Transformation d'une conique propre	230
8,6.	Détermination de coniques	231
	Représentation paramétrique d'une conique propre	234
8,7.	Faisceau linéaire de coniques	235
	Points fixes	236
	Coniques dégénérées d'un faisceau	236
	Classification des faisceaux	237
	Théorème de Desargues	240
8,8.	Quadriques	241
	Equation d'une quadrique	241
	Points conjugués. Points doubles	242
	Exercices	243
CHAPITRE 9. — <i>Coniques en Géométries affine et euclidienne</i>		249
9,1.	Géométrie affine	249
	Coniques réelles et imaginaires	251
	Points à l'infini	252
9,2.	Centres et diamètres	253
	Directions conjuguées	257
	Diamètres conjugués	258
9,3.	Géométrie euclidienne	259
	Directions principales d'une conique	259
	Détermination des directions principales	260
	Réduction de l'équation d'une conique	261
	Axes de symétrie	264
9,4.	Foyers et directrices	265
	Détermination des foyers	268
	Foyers des coniques propres réelles	268
	Exercices	271
CHAPITRE 10. — <i>Surfaces en géométrie euclidienne</i>		275
10,1.	Généralités	275
	Surface paramétrée	275
	Plan tangent	276
	Extension de la notion de surface	277
	Génération de surfaces	279
10,2.	Surfaces cylindriques	281
	Cylindres circonscrits à une surface	284
10,3.	Surfaces coniques	286
	Cônes circonscrits à une surface	289
10,4.	Surfaces conoïdes	290
	Plans tangents à une surface réglée	293

TABLE DES MATIÈRES

XI

10,5.	Surfaces de révolution	295
	Méridiennes. Parallèles	296
	Plans tangents à une surface de révolution	301
10,6.	Quadriques	302
	Directions principales	303
	Détermination des directions principales	304
	Réduction de l'équation	305
	Exercices	311
	Problèmes	319
