

Roland
FRAÏSSÉ

Cours
de
**LOGIQUE
MATHÉMATIQUE**

A.P.C. de TIZI-OUZOU
BIBLIOTHÈQUE
COMMUNALES



Tome 1
Relation
et formule logique

gauthier-villars

M 667

Université "Boulevard NAMMERI"
Faculté des Sciences
Bibliothèque Département T.C.T



COURS
DE
LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Tome 1
Relation et formule logique

N^o inventi 67 $\frac{1}{1}$
N^o de cote ~~67 $\frac{1}{1}$~~

67 $\frac{1}{1}$

Table

| | Pages. |
|---|--------|
| AVANT-PROPOS | VII |
| INTRODUCTION | IX |
| Ch. 1. — <i>Mot, formule</i> | 1 |
| 1.1. Mot, rang, occurrence; concaténé, intervalle, substitution | 2 |
| 1.2. Poids, formule, sous-formule, occurrence de formule, terme dominant un autre | 3 |
| 1.3. Poids d'un mot | 6 |
| 1.4. Atome, substitution pondérée | 8 |
| Ch. 2. — <i>Connection et formule connective</i> | 19 |
| 2.1. Valeurs + et —, connection, arité, négation, conjonction, disjonction, implication, déduction | 19 |
| 2.2. Formule connective, valeur, tautologie, antilogie, déduction | 23 |
| 2.3. Formule en \neg , \wedge , \vee , duale, formule conjonctive, disjonctive | 26 |
| 2.4. Lemme de complétude pour les tautologies | 29 |
| 2.5. Traduction du lemme de complétude au moyen de la substitution pondérée | 33 |
| 2.6. Indice ou atome actif, inactif; réduite, connection positive, connection alternante | 36 |
| 2.7. Ensemble clos par formulation | 38 |
| Ch. 3. — <i>Relation, multirelation, opérateur et prédicat</i> | 49 |
| 3.1. Relation, multirelation, base, arité; concaténée; restriction et extension | 49 |
| 3.2. Isomorphisme, automorphisme, abritement, âge .. | 53 |
| 3.3. Déduction entre relations | 57 |
| 3.4. Opérateur, prédicat, prédicarité et arité; modèle; sélecteur, opérateurs + et —, identiteur, connecteur, changeur de rangs, dilateur | 59 |

| | Pages. |
|---|--------|
| 3.5. Dédution entre opérateurs, opérateur composé; transformée et transformée réciproque d'une classe..... | 62 |
| 3.6. Indice actif ou inactif, quanteur, quanteur composé | 64 |
| 3.7. Composition entre quanteur et connecteur..... | 67 |
| 3.8. Composition entre quanteur et changeur de rangs. | 70 |
| Ch. 4. — <i>Isomorphisme local; opérateur et formule libres</i> | 83 |
| 4.1. Isomorphisme local, automorphisme local..... | 83 |
| 4.2. Interprétabilité libre..... | 85 |
| 4.3. Opérateur libre..... | 88 |
| 4.4. Lemme de compacité..... | 92 |
| 4.5. Prédicat actif ou inactif, opérateurs $\forall\mathcal{X}$ et $\exists\mathcal{X}$, lemme d'interpolation..... | 93 |
| 4.6. Formule libre, arité, prédicat, valeur, thèse, anti-thèse, déduction, transformée d'une formule libre par une application..... | 95 |
| 4.7. Lemme de complétude pour les thèses libres..... | 100 |
| 4.8. Classe universelle..... | 102 |
| Ch. 5. — <i>Formule, opérateur, classe et équivalence logiques; théorème du modèle dénombrable</i> | 115 |
| 5.1. Formule logique, arité, prédicat, formules liée, prénexé, canonique, indices libres et liés..... | 115 |
| 5.2. Opérateur logique, valeur, représentation par une formule prénexé, indice actif, inactif..... | 117 |
| 5.3. Thèse, antithèse, thèse explicite, déduction, transformée d'une formule logique par une application..... | 121 |
| 5.4. Modèle d'une formule liée, classe logique..... | 126 |
| 5.5. Classe logique : cas des ensembles et des multi-relations unaires..... | 129 |
| 5.6. Équivalence logique, théorème du modèle dénombrable..... | 132 |
| 5.7. Classe logique d'abritement; compacité..... | 137 |
| Ch. 6. — <i>Théorèmes de complétude et d'interpolation</i> | 143 |
| 6.1. Assignée, déploiement, déployée, numéro de renvoi, rang de reprise..... | 143 |
| 6.2. Toute déployée d'une formule P est équidéduite de P..... | 146 |
| 6.3. Théorème de complétude..... | 148 |
| 6.4. Lemmes sur le déploiement..... | 149 |
| 6.5. Déploiement complété, biassignée..... | 150 |
| 6.6. Déployée souple..... | 155 |
| 6.7. Théorème d'interpolation..... | 158 |

| | Pages. |
|--|--------|
| Ch. 7. — <i>Interprétabilité entre relations</i> | 165 |
| 7.1. Interprétabilité : généralités..... | 165 |
| 7.2. Interprétabilité par la somme et le produit des entiers naturels; relation arithmétique..... | 168 |
| 7.3. Interprétabilité de l'ensemble des entiers naturels par la somme et le produit des entiers relatifs, des rationnels, des réels..... | 172 |
| 7.4. Multirelation fini-axiomatisable..... | 176 |
| 7.5. Théorème d'interprétabilité..... | 180 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | 185 |
| INDEX..... | 193 |

Université "Mouloud MAMMERI"
Faculté des Sciences
Bibliothèque Département T.C.T

La présente édition, en deux tomes, reprend en l'élargissant considérablement, le contenu de l'unique tome de la première édition (1967).

Le point de vue adopté est celui de la *Sémantique*, science des rapports entre les formules logiques et les relations ou modèles qui les vérifient, de préférence à celui de la *Syntaxe*, science de la structure des formules logiques et de la déduction formelle.

L'ouvrage expose avec soin et rigueur les notions élémentaires du calcul des connexions (non, et, ou), puis les notions de relation, formule logique, complétude, interprétabilité (tome 1), théorie, compacité, axiomatisabilité, ultraproduct, forçing (tome 2).

La principale originalité du livre tient au constant échange entre logique et théorie des relations. De plus, le lecteur trouvera de nombreux exercices et énoncés de problèmes ouverts ; il s'initiera ainsi à une partie très vaste de la logique mathématique moderne.

L'auteur n'exige du lecteur qu'une connaissance élémentaire de la théorie des ensembles et une certaine habitude de l'abstraction, surtout en combinatoire.

Ce cours s'adresse en premier lieu aux chercheurs en logique mathématique (3^e cycle) et aux étudiants terminant leur Maîtrise de Mathématiques et désirant s'initier à la recherche en logique (fin du 2^e cycle, C4).

Enfin, les Enseignants des universités et des lycées, mathématiciens non forcément logiciens, ou philosophes, y trouveront la possibilité de préciser leur idée du raisonnement déductif.

La présente édition, en deux tomes, reprend en l'élargissant considérablement, le contenu de l'unique tome de la première édition (1967).

Le point de vue adopté est celui de la *Sémantique*, science des rapports entre les formules logiques et les relations ou modèles qui les vérifient, de préférence à celui de la *Syntaxe*, science de la structure des formules logiques et de la déduction formelle.

L'ouvrage expose avec soin et rigueur les notions élémentaires du calcul des connexions (non, et, ou), puis les notions de relation, formule logique, complétude, interprétabilité (tome 1), théorie, compacité, axiomatisabilité, ultraproduct, forçing (tome 2).

La principale originalité du livre tient au constant échange entre logique et théorie des relations. De plus, le lecteur trouvera de nombreux exercices et énoncés de problèmes ouverts ; il s'initiera ainsi à une partie très vaste de la logique mathématique moderne.

L'auteur n'exige du lecteur qu'une connaissance élémentaire de la théorie des ensembles, et une certaine habitude de l'abstraction, surtout en combinatoire.

Ce cours s'adresse en premier lieu aux chercheurs en logique mathématique (3^e cycle) et aux étudiants terminant leur Maîtrise de Mathématiques et désirant s'initier à la recherche en logique (fin du 2^e cycle, C4).

Enfin, les Enseignants des universités et des lycées, mathématiciens non forcément logiciens, ou philosophes, y trouveront la possibilité de préciser leur idée du raisonnement déductif.