

100
Catherine
Long-Ferrand

**ensembles
algèbre
et analyse**

les notions *HAMLAT*
de mathématiques
de base
dans l'enseignement
du second degré

Armand Colin

~~M. 662~~

M. 662

Jacqueline Lelong-Ferrand
professeur à la faculté des sciences de Paris

Université "Mouleoud MAMMERI"
Faculté des Sciences
Bibliothèque Département T.C.T

les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré

axiomatique et pédagogie



ensembles algèbre et analyse

2^e édition

E-58 A



N^o invent. : 1567
N^o de cote : M. 662

Armand Colin

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS.

CHAP. I ♦ Bases logiques des mathématiques 11

Rudiments de logique, 11. Langage et signes, 13. Difficultés pratiques, 14. Relations binaires; équivalences, 16. Le rôle des équivalences, 17. Les fausses égalités, 19. Relations d'ordre, 20.

Exercices, 201.

CHAP. II ♦ Ensembles et structures 22

Introduction, 22. Énoncé des axiomes, 23. Difficultés; autres axiomes, 25. Ensembles quotients, 27. Ensembles ordonnés, 29. Correspondances, fonctions, applications, 31. Opérations, 35. Structures algébriques simples, 36. Le point de vue pédagogique, 40.

Exercices, 202.

CHAP. III ♦ Construction des nombres entiers 44

Introduction, 44. Nombres cardinaux, 45. Opérations sur les cardinaux, 46. Les cardinaux finis, 49. Soustraction; relation d'ordre sur \mathbb{N} , 52. Problèmes de majoration et de minoration, 53. Problèmes d'ordination; ensembles dénombrables; suites, 55. Division; puissances, 59. Systèmes de numération, 61. Les axiomes de Péano, 63. Étude des opérations, d'après les axiomes de Péano, 65. Comparaison des méthodes; point de vue pédagogique, 68.

Exercices, 205.

CHAP. IV ♦ Problèmes relatifs aux entiers : dénombrements, probabilités, problèmes de divisibilité... 70

Introduction, 70. Arrangements; permutations, 71. Combinaisons; formule du binôme, 73. Probabilités, 76. Étude pratique, 78. Problèmes de divisibilité, 79. Propriétés du plus grand commun diviseur, 81. Théorème de Gauss; plus petit commun multiple, 83. Nombres premiers, 85. Généralisations et conclusion, 87.

Exercices, 207.

CHAP. V ♦ Extensions algébriques successives de la notion de nombre 88

I. Nombres relatifs et rationnels. Notions d'anneau et de corps 88

Introduction, 88. Problèmes d'extension, 90. Le procédé de symétrisation, 92. Les premières extensions de l'ensemble des entiers naturels, 95. La notion de nombre relatif en classe de Quatrième, 97. Construction axiomatique de l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, 99. Construction axiomatique de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels, 100. Anneaux et corps; autre exemple : les congruences modulo p , 102.

II. Racine carrée. Nombres complexes 105

Racine carrée; définition axiomatique, 105. Cas particulier : définition des nombres complexes, 109. L'anneau des polynômes; extensions algébriques et transcendantes, 112. Le point de vue pédagogique, 117.

Exercices, 210.

CHAP. VI ♦ Approximations décimales. Nombres réels 119

Mesure et repérage des grandeurs, 119. Nombres décimaux; approximations décimales, 122. Notion de valeur approchée, 123. Développement décimal d'un quotient ou d'une racine carrée, 125. Développements décimaux illimités, 127. Développements équivalents; notion de nombre réel, 130. Addition des nombres réels, 133. Multiplication des nombres réels, 136. Propriétés caractéristiques des nombres réels, 140. Caractérisation axiomatique des nombres réels, 143. Autres procédés de définition des nombres réels; discussion, 148.

Exercices, 217.

CHAP. VII ♦ Éléments d'analyse 153

Revision des notions de base; notion d'espace vectoriel, 153. La topologie de la droite numérique, 157. Limites de suites de nombres réels, 161. Limites de fonctions; continuité, 165. Opérations sur les limites, 169. Dérivées, 174. Utilisation des dérivées, 177. Propriétés des dérivées, 179. Application des dérivées à l'étude de la variation des fonctions, 183. Primitives; notion d'aire, 185. Fonctions élémentaires, 190. La fonction logarithme, 193. La fonction exponentielle, 195. Le point de vue de l'enseignement, 199.

Exercices, 222.

OUVRAGES CITÉS 228

INDEX 229

NOTATIONS

$A \Rightarrow B$	A entraîne B.
$A \Leftrightarrow B$	A équivaut à B.
$\forall x$	Quel que soit x .
$\exists x$	Il existe un x .
$x \in A$	x appartient à A.
$x \notin A$	x n'appartient pas à A.
$A \ni B$	A contient B.
$A \subset B$	A est contenu dans B.
\emptyset	Ensemble vide.
$A \cup B$	Réunion de A et B.
$A \cap B$	Intersection de A et B.
$\complement_E(A)$ ou $E - A$	Complémentaire de A par rapport à E.
$\mathcal{P}(E)$	Ensemble des parties de l'ensemble E.
$\cup E_i$	Réunion des ensembles E_i
$\cap E_i$	Intersection des ensembles E_i .
$A \times B$	Produit des ensembles A, B.
$\prod E_i$	Produit des ensembles E_i .
(x, y)	Couple formé par les objets x, y .
$x = y$	x égale y .
$x \equiv y$	x est congru (ou équivalent) à y .
$x \leq y$	x est au plus égal à y .
$x \geq y$	x est au moins égal à y .
$x < y$	x est strictement inférieur à y .
$x > y$	x est strictement supérieur à y .
$x < y$ ou $y > x$	x est subordonné à y (pour une relation d'ordre quelconque).
$\sup A$	Borne supérieure de A.
$\inf A$	Borne inférieure de A.
$[a, b]$	Intervalle fermé a, b (défini par $a \leq x \leq b$).
$]a, b[$	Intervalle ouvert a, b (défini par $a < x < b$).
E/R	Quotient de l'ensemble E par la relation d'équivalence R.

$f(X)$	Image de l'ensemble X dans l'application f .
$f^{-1}(Y)$	Image réciproque de l'ensemble Y dans l'application f .
f^{-1}	Application réciproque de f .
$f \circ g$	Composé des applications f, g .
$x \rightarrow f(x)$	Application f .
$f X$	Restriction de f à l'ensemble X .
$x * y$	Composé des éléments x, y .
e	Élément neutre (pour une loi de composition quelconque) — ou le nombre $e = 2,718\ 28\dots$ défini par $\log e = 1$.
x^{-1}	Symétrique (ou inverse) de x .
$-x$	Opposé de x (pour une loi d'addition).
x^n	Produit (ou composé) de n éléments égaux à x .
$n x$	Somme de n éléments égaux à x .
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels.
\mathbb{N}^*	Ensemble des entiers naturels autres que zéro.
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs.
\mathbb{Q}	Ensemble des nombres rationnels.
\mathbb{Q}^+	Ensemble des nombres rationnels positifs (ou nuls).
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs (ou nuls).
$\overline{\mathbb{R}}$	Droite numérique achevée.
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
\mathbb{Z}_p	Ensemble des classes résiduelles modulo p .
$A[x]$	Anneau des polynômes à coefficients dans l'anneau A .
$\sum u_i$	Somme des nombres u_i .
$\prod u_i$	Produit des nombres u_i .
$\inf(u_1 \dots u_n)$	Le plus petit des nombres $u_1 \dots u_n$.
$\sup(u_1 \dots u_n)$	Le plus grand des nombres $u_1 \dots u_n$.
$a b$	a divise b .
C_n^p ou $\binom{n}{p}$	Coefficients du binôme.
$\lim x_n$	Limite de la suite x_n .
$\log x$	Logarithme népérien de x .
$\log_a x$	Logarithme de base a de x .
$\exp x$ ou e^x	Fonction exponentielle.

$f(X)$	Image de l'ensemble X dans l'application f .
$f^{-1}(Y)$	Image réciproque de l'ensemble Y dans l'application f .
f^{-1}	Application réciproque de f .
$f \circ g$	Composé des applications f, g .
$x \rightarrow f(x)$	Application f .
$f X$	Restriction de f à l'ensemble X .
$x * y$	Composé des éléments x, y .
e	Élément neutre (pour une loi de composition quelconque) — ou le nombre $e = 2,718\ 28\dots$ défini par $\log e = 1$.
x^{-1}	Symétrique (ou inverse) de x .
$-x$	Opposé de x (pour une loi d'addition).
x^n	Produit (ou composé) de n éléments égaux à x .
$n x$	Somme de n éléments égaux à x .
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels.
\mathbb{N}^*	<i>Ensemble des entiers naturels autres que zéro.</i>
\mathbb{Z}	<i>Ensemble des entiers relatifs.</i>
\mathbb{Q}	Ensemble des <i>nombre</i> s rationnels.
\mathbb{Q}^+	Ensemble des nombres rationnels positifs (ou nuls).
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs (ou nuls).
$\overline{\mathbb{R}}$	Droite numérique achevée.
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
\mathbb{Z}_p	Ensemble des classes résiduelles modulo p .
$A[x]$	Anneau des polynômes à coefficients dans l'anneau A .
$\sum u_i$	Somme des nombres u_i .
$\prod u_i$	Produit des nombres u_i .
$\inf(u_1 \dots u_n)$	Le plus petit des nombres $u_1 \dots u_n$.
$\sup(u_1 \dots u_n)$	Le plus grand des nombres $u_1 \dots u_n$.
$a b$	a divise b .
C_n^p ou $\binom{n}{p}$	Coefficients du binôme.
$\lim x_n$	Limite de la suite x_n .
$\log x$	Logarithme népérien de x .
$\log_a x$	Logarithme de base a de x .
$\exp x$ ou e^x	Fonction exponentielle.