

Exercices

*l'intégrale*

Daniel Fredon  
Danièle Penot-Catus  
Claude Morin

# Analyse avec Maple

184 exercices et problèmes corrigés  
dont 80 à l'aide de *Maple*  
rappels de cours

1<sup>re</sup> année MPSI, PCSI, PTSI

DUNOD

~~M1710~~

M 659



# Analyse avec Maple

184 exercices et problèmes corrigés  
dont 80 à l'aide de *Maple*  
rappels de cours

I<sup>re</sup> année MPSI, PCSI, PTSI

**Daniel Fredon**

*Assistant de mathématiques à l'université de Limoges*

**Danièle Penot-Catus**

*Professeur en mathématiques supérieures au lycée Gay-Lussac à Limoges*

**Claude Morin**

*Professeur en mathématiques spéciales au lycée Gay-Lussac à Limoges*

N° de Côte:

DUNOD

Faculté des Sciences  
BIBLIOTHEQUE  
N° d'Inventaire S. 1198

1/2

# Table des matières

CHAPITRE 1 • NOMBRES RÉELS	1
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>1</b>
1.1. Généralités	1
1.1.1 Définitions	1
1.1.2 Valeur absolue	1
1.1.3 Intervalles	1
1.2. Ordre dans $\mathbb{R}$	2
1.2.1 Définitions	2
1.2.2 Propriétés	2
1.2.3 Borne supérieure, borne inférieure	2
1.3. Nombres rationnels	3
1.3.1 Généralités	3
1.3.2 Propriété d'Archimède	3
1.3.3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	3
1.4. Approximations décimales	3
1.4.1 Valeurs approchées	3
1.4.2 Partie entière	3
1.4.3 Valeurs décimales approchées	3
1.5. Comment Maple gère les réels	4
1.5.1 Représentation des réels	4
1.5.2 Quelques erreurs	4
1.5.3 Remarques	5
<b>EXERCICES</b>	<b>5</b>
A. Applications directes du cours	5
B. Problèmes	6
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>7</b>
CHAPITRE 2 • SUITES NUMÉRIQUES	13
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>13</b>

2.1. Généralités	13
2.1.1 Définition d'une suite	13
2.1.2 Suite monotone	13
2.1.3 Suite bornée	13
2.2. Limite d'une suite	13
2.2.1 Suite convergente	13
2.2.2 Limites infinies	14
2.2.3 Opérations sur les suites convergentes	14
2.2.4 Relation d'ordre	14
2.3. Relations de comparaison	14
2.3.1 Définitions	14
2.3.2 Propriétés	15
2.3.3 Exemples fondamentaux	15
2.4. Existence de limite	15
2.4.1 Convergence des suites monotones	15
2.4.2 Suites adjacentes	15
2.4.3 Suites extraites	15
2.5. Suites récurrentes	16
2.5.1 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	16
2.5.2 Suites récurrentes linéaires du second ordre	16
2.6. Suites de nombres complexes	17
<b>EXERCICES</b>	17
A. Applications directes du cours	17
B. Problèmes	19
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	22
<b>CHAPITRE 3 • FONCTIONS NUMÉRIQUES</b>	37
<b>RAPPELS DE COURS</b>	37
3.1. Définitions et premières propriétés	37
3.1.1 Relation d'ordre	37
3.1.2 Valeur absolue d'une fonction	37
3.1.3 Sens de variation	37
3.1.4 Parité, périodicité	38
3.1.5 Fonctions lipchitziennes	38

3.2. Limites	38
3.2.1 Limite d'une fonction en $x_0$	38
3.2.2 Limite à gauche, limite à droite	38
3.2.3 Limite infinie en $x_0$	39
3.2.4 Limite de $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$	39
3.2.5 Propriété locale	39
3.2.6 Propriétés liées à l'ordre	39
3.2.7 Opérations algébriques	40
3.2.8 Fonction composée	40
3.2.9 Cas des fonctions monotones	40
3.3. Comparaison au voisinage d'un point	40
3.3.1 Définitions	40
3.3.2 Exemples fondamentaux	41
3.3.3 Propriétés des fonctions équivalentes	41
3.3.4 Équivalents classiques	41
3.4. Continuité	41
3.4.1 Définitions	41
3.4.2 Algèbre $\mathcal{C}(I)$	42
3.4.3 Image d'un intervalle par une fonction continue	42
MPSI 3.4.4 Continuité uniforme	42
<b>EXERCICES</b>	<b>43</b>
A. Applications directes du cours	43
B. Problèmes	44
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>45</b>
<b>CHAPITRE 4 • FONCTIONS DÉRIVABLES</b>	<b>53</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>53</b>
4.1. Dérivée en un point, fonctions dérivées	53
4.1.1 Définitions	53
4.1.2 Interprétations	53
4.1.3 Premières propriétés	54
4.1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables	54
4.1.5 Formule de Leibniz	54
4.1.6 Fonction composée de deux fonctions dérivables	55
4.1.7 Dérivée d'une fonction réciproque	55
4.2. Étude globale des fonctions dérivables	55
4.2.1 Extremum	55
4.2.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	55
4.2.3 Variation d'une fonction dérivable	56
4.2.4 Prolongement d'une dérivée	56

3.2. Limites	38
3.2.1 Limite d'une fonction en $x_0$	38
3.2.2 Limite à gauche, limite à droite	38
3.2.3 Limite infinie en $x_0$	39
3.2.4 Limite de $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$	39
3.2.5 Propriété locale	39
3.2.6 Propriétés liées à l'ordre	39
3.2.7 Opérations algébriques	40
3.2.8 Fonction composée	40
3.2.9 Cas des fonctions monotones	40
3.3. Comparaison au voisinage d'un point	40
3.3.1 Définitions	40
3.3.2 Exemples fondamentaux	41
3.3.3 Propriétés des fonctions équivalentes	41
3.3.4 Équivalents classiques	41
3.4. Continuité	41
3.4.1 Définitions	41
3.4.2 Algèbre $\mathcal{C}(I)$	42
3.4.3 Image d'un intervalle par une fonction continue	42
<b>MPSI</b> 3.4.4 Continuité uniforme	42
<b>EXERCICES</b>	<b>43</b>
A. Applications directes du cours	43
B. Problèmes	44
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>45</b>
<b>CHAPITRE 4 • FONCTIONS DÉRIVABLES</b>	<b>53</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>53</b>
4.1. Dérivée en un point, fonctions dérivées	53
4.1.1 Définitions	53
4.1.2 Interprétations	53
4.1.3 Premières propriétés	54
4.1.4 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables	54
4.1.5 Formule de Leibniz	54
4.1.6 Fonction composée de deux fonctions dérivables	55
4.1.7 Dérivée d'une fonction réciproque	55
4.2. Étude globale des fonctions dérivables	55
4.2.1 Extremum	55
4.2.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	55
4.2.3 Variation d'une fonction dérivable	56
4.2.4 Prolongement d'une dérivée	56

4.3. Étude locale des fonctions dérivables	56
4.3.1 Développements limités	56
4.3.2 Formule de Taylor-Young	57
4.3.3 Opérations sur les développements limités	58
4.3.4 Applications des développements limités	58
4.3.5 Calcul des développements limités par Maple	59
4.4. Convexité	59
4.4.1 Cas général	59
4.4.2 Fonctions convexes dérivables	59
<b>EXERCICES</b>	<b>60</b>
A. Application directes du cours	60
B. problèmes	63
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>64</b>
<b>CHAPITRE 5 • FONCTIONS USUELLES</b>	<b>77</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>77</b>
5.1. Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances	77
5.1.1 Fonction logarithme népérien	77
5.1.2 Fonction exponentielle	77
5.1.3 Logarithme et exponentielle de base $a$	78
5.1.4 Fonction puissance	78
5.1.5 Comparaison des fonctions	78
5.2. Fonctions hyperboliques et réciproques	79
5.2.1 Fonctions hyperboliques	79
5.2.2 Fonctions hyperboliques réciproques	80
5.3. Fonctions circulaires réciproques	81
5.3.1 Fonction arc sinus	81
5.3.2 Fonction arc cosinus	81
5.3.3 Fonction arc tangente	82
5.4. Fonction exponentielle complexe	83
5.5. Caractérisation des fonctions usuelles	83
5.5.1 Par des relations fonctionnelles	83
5.5.2 Par des équations différentielles	83
<b>EXERCICES</b>	<b>84</b>
A. Applications directes du cours	84

B. Problèmes	86
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>87</b>
<b>CHAPITRE 6 • CALCUL INTÉGRAL</b>	<b>101</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>101</b>
6.1. Définitions	101
6.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier	101
6.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux, à valeurs réelles	101
6.2. Propriétés de l'intégrale	102
6.2.1 Invariance	102
6.2.2 Linéarité	103
6.2.3 Relation de Chasles	103
6.2.4 Relation d'ordre	103
6.2.5 Majoration de l'intégrale	103
6.2.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz	103
6.2.7 Sommes de Riemann	104
6.3. Intégrale d'une fonction continue par morceaux, à valeurs complexes	104
6.4. Calcul numérique d'une intégrale	104
6.4.1 Méthode des rectangles	104
6.4.2 Méthode des trapèzes	105
<b>EXERCICES</b>	<b>105</b>
A. Applications directes du cours	105
B. Problèmes	107
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>110</b>
<b>CHAPITRE 7 • CALCUL DES PRIMITIVES</b>	<b>123</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>123</b>
7.1. Primitives d'une fonction continue	123
7.1.1 Définition	123
7.1.2 Théorèmes	123
7.2. Méthodes de calcul	123
7.2.1 Linéarité	123
7.2.2 Intégration par parties	124
7.2.3 Intégration par changement de variable	124

7.3. Formules de Taylor (cas global)	125
7.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral	125
7.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange	125
7.4. Primitives de fonctions rationnelles	125
7.5. Autres primitives se ramenant aux fonctions rationnelles	126
7.5.1 Primitives de fractions rationnelles en sinus et cosinus	126
7.5.2 Primitives de fractions rationnelles en $e^x$ , $\text{sh } x$ , $\text{ch } x$	126
7.5.3 Primitives de fonctions contenant des radicaux	126
<b>EXERCICES</b>	<b>127</b>
A. Applications directes du cours	127
B. Problèmes	129
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>131</b>
<b>CHAPITRE 8 • INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE</b>	<b>147</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>147</b>
8.1. Fonctions continues intégrables (valeurs positives)	147
8.1.1 Définition	147
8.1.2 Autres caractérisations	147
8.1.3 Propriétés	148
8.1.4 Intégrales de Riemann	148
8.1.5 Critères d'intégrabilité	148
8.1.6 Cas d'une fonction de signe non constant	149
8.2. Fonctions continues intégrables (valeurs complexes)	149
8.2.1 Définition	149
8.2.2 Théorème	149
8.2.3 Propriétés	149
<b>EXERCICES</b>	<b>150</b>
A. Applications directes du cours	150
B. Problèmes	151
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>152</b>
<b>CHAPITRE 9 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>165</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>165</b>

9.1. Définitions générales	165
9.1.1 Équations différentielles	165
9.1.2 Problème de Cauchy	165
9.2. Équations différentielles du premier ordre	166
9.2.1 Équations à variables séparables (ou séparées)	166
9.2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre	166
9.3. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	167
9.3.1 Définition	167
9.3.2 Théorèmes dus à la linéarité	167
9.3.3 Résolution de l'équation homogène associée	168
9.3.4 Résolution de l'équation complète dans quelques cas	168
<b>EXERCICES</b>	<b>169</b>
A. Applications directes du cours	169
B. Problèmes	171
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>173</b>
<b>CHAPITRE 10 • CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES</b>	<b>193</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>193</b>
10.1. Espace $\mathbb{R}^n$	193
10.1.1 Norme sur un espace vectoriel	193
10.1.2 Boules	193
10.1.3 Parties bornées	194
10.1.4 Parties ouvertes, parties fermées	194
MPSI 10.1.5 Caractérisation séquentielle	194
MPSI 10.1.6 Théorème de Bolzano-Weierstrass	194
10.2. Fonctions continues de deux variables	194
10.2.1 Fonctions de deux variables	194
MPSI 10.2.2 Fonctions lipschitziennes	195
10.2.3 Limite et continuité	195
10.2.4 Composition des fonctions continues	196
MPSI 10.2.5 Continuité et images	196
<b>EXERCICES</b>	<b>197</b>
A. Applications directes du cours	197

B. Problèmes	199
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>200</b>
<b>CHAPITRE 11 • FONCTIONS DE DEUX VARIABLES (CALCUL DIFFÉRENTIEL)</b>	<b>209</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>209</b>
11.1. Dérivées partielles premières	209
11.1.1 Dérivée en un point selon un vecteur	209
11.1.2 Dérivées partielles	209
11.1.3 Fonctions de classe $C^1$	209
11.1.4 Extremum local d'une fonction de deux variables	211
11.1.5 Dérivation des fonctions composées	211
11.2. Coordonnées non cartésiennes	212
11.2.1 Coordonnées polaires (dans le plan)	212
11.2.2 Coordonnées cylindriques (dans l'espace)	213
11.2.3 Coordonnées sphériques (dans l'espace)	213
11.3. Dérivées partielles d'ordre supérieur	213
11.3.1 Définition	213
11.3.2 Fonctions de classe $C^k$	214
11.3.3 Théorème de Schwarz	214
<b>EXERCICES</b>	<b>214</b>
A. Applications directes du cours	214
B. Problèmes	217
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>218</b>
<b>CHAPITRE 12 • INTÉGRALES MULTIPLES</b>	<b>231</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>231</b>
12.1. Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle	231
12.1.1 Définition	231
12.1.2 Propriétés	231
12.1.3 Théorème de Fubini	232
12.2. Extensions	232
12.2.1 Cas d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$	232
12.2.2 Intégrales triples	233

12.3. Applications	233
12.3.1 Interprétations d'une intégrale double ou triple	233
12.3.2 Moments et centres d'inertie	234
<b>EXERCICES</b>	<b>234</b>
A. Applications directes du cours	234
B. Problèmes	236
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>237</b>
<b>CHAPITRE 13 • CHAMPS DE VECTEURS</b>	<b>247</b>
<b>RAPPELS DE COURS</b>	<b>247</b>
13.1. Champs de vecteurs du plan ou de l'espace	247
13.1.1 Définition	247
13.1.2 Divergence d'un champ de vecteurs du plan ou de l'espace	247
13.1.3 Rotationnel d'un champ de vecteurs de l'espace	247
13.2. Intégrales curvilignes	248
13.2.1 Définition	248
13.2.2 Circulation d'un champ de vecteurs	248
13.2.3 Propriétés de l'intégrale curviligne	249
13.2.4 Formule de Green-Riemann	249
13.3. Champs de gradients	249
13.3.1 Définition	249
13.3.2 Circulation d'un champ de gradients	250
13.3.3 Caractérisation des champs de gradients	250
<b>EXERCICES</b>	<b>250</b>
A. Applications directes du cours	250
B. Problèmes	252
<b>CORRECTION DES EXERCICES</b>	<b>253</b>
<b>Index</b>	<b>263</b>

J'INTÈGRE

Daniel Fredon  
Danièle Penot-Catus  
Claude Morin

*J'intègre*

1<sup>re</sup> année  
MPSI  
PCSI  
PTSI

## ANALYSE avec *Maple* 184 exercices et problèmes corrigés dont 80 à l'aide de *Maple*

EXERCICES

Ce recueil d'exercices résolus d'analyse couvre le programme de 1<sup>re</sup> année des filières MPSI, PCSI et PTSI.

Chaque chapitre débute par un résumé de cours, suivi de nombreux exercices, qui s'articulent en deux catégories :

- les exercices d'application directe, qui permettent de dégager les notions essentielles du cours ;
- des problèmes de concours, pour vérifier les acquis et se préparer au mieux à l'examen.

Certaines questions proposent une solution assistée par ordinateur grâce à *Maple*, dont on découvre ici toutes les subtilités. L'accent est mis sur le raisonnement et la méthode à mettre en œuvre : cet ouvrage a pour but de faciliter l'assimilation du cours de mathématiques, en considérant *Maple* comme un outil.

Les parties réservées à la section MPSI sont signalées.

DANIEL FREDON  
est assistant  
de mathématiques  
à l'université de Limoges.

DANIÈLE PENOT-CATUS  
ET CLAUDE MORIN  
sont professeurs  
en mathématiques  
supérieures  
et en mathématiques  
spéciales au lycée  
Gay-Lussac à Limoges.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE



9 782100 049141

ISBN 2 10 004914 3  
Code 044914

<http://www.dunod.com>



DUNOD