

SCIENCES SUP

Mathématiques appliquées pour le Master / SMAI'

CALCUL STOCHASTIQUE ET MODÈLES DE DIFFUSIONS

Cours et exercices corrigés

*Francis Comets
Thierry Meyre*

DUNOD

M 654

35817
②

CALCUL STOCHASTIQUE ET MODÈLES DE DIFFUSIONS

Cours et exercices corrigés



Francis Comets

Professeur à l'université Paris 7

Thierry Meyre

Maître de conférences à l'université Paris 7

DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS	IX
--------------	----

Partie 1 • Cours

CHAPITRE 1 • INTRODUCTION : PROCESSUS ALÉATOIRE

1.1 Définition	3
1.2 Loi des processus aléatoires	4
1.3 Existence de processus aléatoires	6
1.4 Espaces gaussiens	7

CHAPITRE 2 • MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES

2.1 Mouvement brownien	11
2.2 Principe d'invariance	16
2.3 Construction du mouvement brownien	18
2.4 Variation quadratique du mouvement brownien	21
2.5 Martingales	22
2.6 Caractérisation de Paul Lévy	32

CHAPITRE 3 • INTÉGRALE ET DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

3.1 Intégrale stochastique d'Itô	37
3.2 Formule d'Itô	44

CHAPITRE 4 • PREMIERS PAS AVEC LE CALCUL STOCHASTIQUE

4.1	Équation de Langevin	55
4.2	Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles	61
4.3	La transformation de Girsanov	70
4.4	La loi de l'arcsinus	80

CHAPITRE 5 • ÉQ. DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET PROCESSUS DE DIFFUSION

5.1	Équations différentielles stochastiques	83
5.2	Approximation diffusion	96
5.3	Filtrage linéaire	99

CHAPITRE 6 • DIFFUSIONS ET OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

6.1	Les diffusions comme processus de Markov	107
6.2	Diffusions et équations aux dérivées partielles	112
6.3	Mouvement d'une particule dans un potentiel	119
6.4	Générateur infinitésimal : d'autres applications	131

CHAPITRE 7 • SIMULATION DE DIFFUSIONS

7.1	Introduction, et le cas du mouvement brownien	137
7.2	Schéma d'Euler	140
7.3	Approximation forte	141
7.4	Approximation faible	144
7.5	Schéma de Milstein	146

Partie 2 • Exercices et problèmes corrigés**CHAPITRE 8 • EXERCICES D'INTRODUCTION : VECTEURS GAUSSIENS**

8.1	Rappels de cours	153
8.2	Exercices corrigés	156

CHAPITRE 9 • MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES, EXERCICES

9.1	Rappels sur l'espérance conditionnelle	167
9.2	Complément de cours en vue des exercices : variation d'un processus	169
9.3	Propriétés du mouvement brownien	170
9.4	Pont brownien	176
9.5	Martingales	181

CHAPITRE 10 • INTÉGRALE ET DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE, EXERCICES

10.1 Complément de cours : intégrale de Wiener	199
10.2 Exercices sur l'intégrale de Wiener	200
10.3 Processus d'Itô	210
10.4 Formule d'Itô avec un mouvement brownien réel	213
10.5 Formule d'Itô avec un mouvement brownien multidimensionnel	219

CHAPITRE 11 • PREMIERS PAS AVEC LE CALCUL STOCHASTIQUE, EXERCICES

11.1 Loi d'un temps d'atteinte pour le mouvement brownien avec dérive constante	227
11.2 Fonctionnelle d'Onsager-Machlup	233
11.3 Changement de dérive	237

CHAPITRE 12 • EDS ET PROCESSUS DE DIFFUSION, EXERCICES

12.1 Mouvement brownien sur le cercle unité	241
12.2 Variation de la constante	242
12.3 Changement de variable	243
12.4 Propriété de martingale pour une transformée de diffusion	244
12.5 Mouvement brownien géométrique	245
12.6 Dépendance en la condition initiale	249
12.7 Équation différentielle stochastique de Tanaka	251

CHAPITRE 13 • DIFFUSIONS ET OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, EXERCICES

13.1 Compléments de cours	253
13.2 Exercices	255

CHAPITRE 14 • SIMULATION DE DIFFUSIONS, EXERCICES

14.1 Introduction à Matlab	266
14.2 Simulation d'un mouvement brownien	268
14.3 Fonction de répartition du maximum d'un pont brownien	273
14.4 Simulation d'une diffusion	276

CHAPITRE 15 • PROBLÈMES CORRIGÉS	
15.1 Équation de Smoluchowski	281
15.2 Fonction hyperbolique d'un mouvement brownien	290
15.3 Carré de Bessel et mouvement brownien sur le cercle	295
15.4 Fonctionnelles quadratiques du mouvement brownien	303
15.5 Martingale locale exponentiellement intégrable mais non martingale	310
15.6 Un modèle de Dyson	315
15.7 Une diffusion linéaire et une formule de Feynman-Kac sur un domaine	318
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	321
INDEX	323

SCIENCES SUP

Francis Comets
Thierry Meyre

CALCUL STOCHASTIQUE ET MODÈLES DE DIFFUSIONS

Les processus de diffusion sont des fonctions aléatoires très utilisées dans les modèles physiques, chimiques, biologiques, statistiques et financiers. Cet ouvrage est une introduction au calcul stochastique, c'est-à-dire au calcul différentiel et intégral spécifique au traitement théorique et numérique de ces processus.

Le cours met l'accent sur les concepts essentiels et les applications. Les exercices et problèmes, assortis de corrigés détaillés, fournissent au lecteur l'opportunité d'acquérir la dextérité exigée par le calcul stochastique. Le cours comme les exercices présentent une introduction à l'important sujet de la simulation numérique, agrémentée de programmes en Matlab.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en Masters de mathématiques financières, de statistique ou de physique théorique, ainsi qu'aux élèves ingénieurs.

SMAT

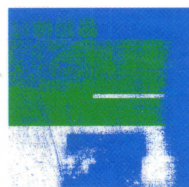


6468417

ISBN 978-2-10-050135-9



www.dunod.com



FRANCIS COMETS
est professeur à l'université
Paris 7.

THIERRY MEYRE
est maître de conférences à
l'université Paris 7.

