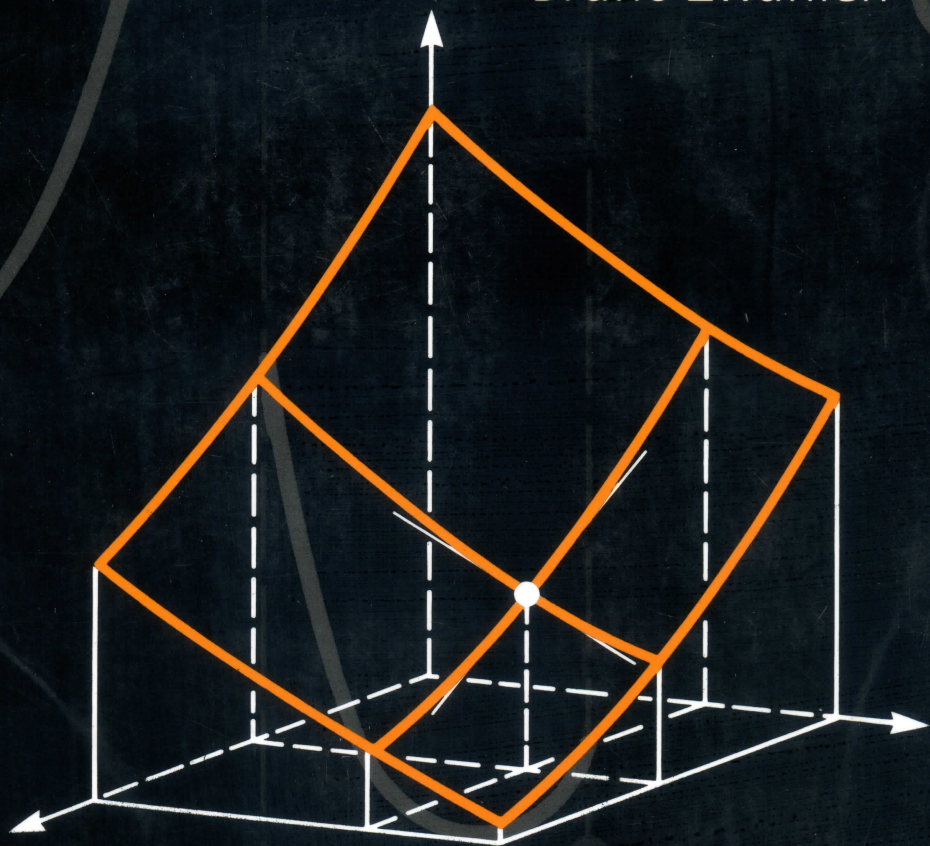


*Enseignement des mathématiques*

# Calcul différentiel et intégral

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs  
variables réelles

Jacques Douchet  
Bruno Zwahlen



Presses polytechniques et universitaires romandes

Enseignement des mathématiques

35812

②

# Calcul différentiel et intégral

M635

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs  
variables réelles

Jacques Douchet  
Bruno Zwahlen



# Table des matières

Introduction .....	v
<b>I. Fonctions réelles d'une variable réelle</b>	
1. Corps des nombres réels	
1.1 AXIOMES DES NOMBRES RÉELS .....	1
1.2 BORNE SUPÉRIEURE ET BORNE INFÉRIEURE D'UN SOUS-ENSEMBLE DE $\mathbb{R}$ .....	3
1.3 $\mathbb{Q}$ EST DENSE DANS $\mathbb{R}$ .....	5
1.4 VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL .....	8
1.5 DROITE NUMÉRIQUE ACHEVÉE .....	9
1.6 EXERCICES .....	10
2. Suites de nombres réels	
2.1 DÉFINITIONS .....	11
2.2 RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE .....	12
2.3 LIMITE D'UNE SUITE .....	14
2.4 SUITES MONOTONES .....	24
2.5 LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE D'UNE SUITE BORNÉE .....	28
2.6 SOUS-SUITES .....	29
2.7 SUITES DE CAUCHY .....	31
2.8 EXERCICES .....	33
3. Séries numériques	
3.1 GÉNÉRALITÉS .....	37
3.2 QUELQUES CRITÈRES DE CONVERGENCE .....	38
3.3 EXERCICES .....	42
4. Fonctions réelles d'une variable réelle	
4.1 DÉFINITIONS .....	45
4.2 LIMITE D'UNE FONCTION .....	52
4.3 FONCTIONS CONTINUES .....	62
4.4 SUITES DE FONCTIONS .....	75
4.5 EXERCICES .....	81
5. Calcul différentiel	
5.1 FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES D'UNE VARIABLE RÉELLE .....	87

5.2	THÉORÈME DE ROLLE ET THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS . . . . .	95
5.3	RÈGLE DE BERNOULLI-L'HOSPITAL . . . . .	102
5.4	DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET FORMULE DE TAYLOR . . . . .	106
5.5	FONCTIONS CONVEXES . . . . .	117
5.6	ÉTUDE DES FONCTIONS . . . . .	122
5.7	EXERCICES . . . . .	125
6.	Fonction exponentielle et fonction logarithme	
6.1	FONCTION EXPONENTIELLE . . . . .	129
6.2	FONCTION LOGARITHME . . . . .	132
6.3	FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE $a > 0$ . . . . .	134
6.4	FONCTION PUISSANCE . . . . .	136
6.5	FONCTIONS HYPERBOLIQUES. . . . .	140
6.6	FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES . . . . .	143
6.7	EXERCICES . . . . .	147
7.	Calcul intégral	
7.1	INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET SES PROPRIÉTÉS . . . . .	151
7.2	APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'INTÉGRALE . . . . .	166
7.3	INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES ET SES APPLICATIONS . . . . .	174
7.4	INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX ET SES PROPRIÉTÉS . . . . .	183
7.5	EXERCICES . . . . .	187
8.	Intégrales généralisées	
8.1	CONVERGENCE DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE BORNÉ . . . . .	191
8.2	CONVERGENCE DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE NON BORNÉ . . . . .	203
8.3	EXERCICES . . . . .	211
9.	Equations différentielles	
9.1	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À VARIABLES SÉPARÉES . . . . .	215
9.2	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE. . . . .	220
9.3	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE. . . . .	223
9.4	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS. . . . .	228
9.5	EXERCICES . . . . .	229

## 10. Formulaire

10.1	DÉRIVÉES-PRIMITIVES . . . . .	233
10.2	DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS . . . . .	235

**II. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles**11. Espace  $\mathbb{R}^n$ 

11.1	NORME EUCLIDIENNE . . . . .	237
11.2	SUITES DANS $\mathbb{R}^n$ . . . . .	239
11.3	TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^n$ . . . . .	243
11.4	EXERCICES . . . . .	255

## 12. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

12.1	DÉFINITIONS . . . . .	259
12.2	LIMITES . . . . .	260
12.3	FONCTIONS CONTINUES . . . . .	266
12.4	THÉORÈMES DE PROLONGEMENT . . . . .	277
12.5	EXERCICES . . . . .	281

## 13. Dérivées partielles

13.1	DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS . . . . .	285
13.2	DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR À UN . . . . .	303
13.3	FORMES DIFFÉRENTIELLES . . . . .	309
13.4	EXTREMA D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES . . . . .	314
13.5	FONCTIONS IMPLICITES – EXTREMA LIÉS . . . . .	323
13.6	EXERCICES . . . . .	332

## 14. Intégrales multiples

14.1	INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN RECTANGLE FERMÉ . . . . .	339
14.2	INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE ET BORNÉE SUR UN SOUS-ENSEMBLE OUVERT BORNÉ $\mathbb{R}^2$ . . . . .	345
14.3	CALCUL DES INTÉGRALLES DOUBLES . . . . .	369
14.4	CHANGEMENTS DE VARIABLES DANS UNE INTÉGRALE DOUBLE . . . . .	376
14.5	INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR $\mathbb{R}^2$ . . . . .	382
14.6	INTÉGRALES MULTIPLES . . . . .	396
14.7	EXERCICES . . . . .	401

Bibliographie . . . . .	405
-------------------------	-----

Index analytique . . . . .	407
----------------------------	-----

Glossaire . . . . .	413
---------------------	-----



# Calcul différentiel et intégral

Cet ouvrage de base a pour but d'exposer aussi simplement que possible, mais néanmoins de manière rigoureuse, les principaux résultats du calcul différentiel et intégral qu'il est indispensable de connaître au sujet des fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles si l'on veut être capable d'entreprendre de façon constructive des études techniques ou scientifiques ■ Pour que le lecteur puisse, par lui-même et à tout moment, vérifier s'il a bien assimilé les principaux résultats démontrés dans cet ouvrage, de nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque chapitre.



**Jacques Douchet** est mathématicien diplômé et docteur ès sciences de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Professeur titulaire, il enseigne l'analyse dans différentes sections de l'EPFL.

**Bruno Zwohlen** est diplômé en physique et docteur ès sciences mathématiques de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich. Nommé professeur de mathématiques dès 1969 à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, il est professeur honoraire.

ISBN 2-88074-728-7



9 782880 747282 >