

**Leçons
sur les invariants intégraux**

ÉLIE CARTAN

HERMANN

ÉLIE CARTAN

INTRODUCTION

M. 63
INT.

Leçons sur les invariants intégraux

Cet ouvrage est la reproduction d'un cours professé pendant le semestre d'été 1928.

Dans deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (16 et 30 juin 1903), l'auteur avait été conduit, dans l'étude des équations différentielles admettant des intégrales données, à considérer certaines formes différentielles qu'il appelait formes intégrales, elles étaient caractérisées par le fait de posséder des premiers intégraux des seules équations différentielles. C'est en poursuivant ses recherches dans le même ordre d'idées que l'auteur est parvenu à une part à l'élaboration de la théorie de l'intégration des systèmes aux dérivées partielles qui admettent des caractéristiques de Cauchy, d'autre part à fonder sa théorie de la structure des groupes continus, finis et infinis, de transformations.

On se trouve que la notion de forme intégrale ne diffère pas essentiellement de celle d'invariant intégral. C'est la confrontation de ces deux notions qui est à la base du présent ouvrage.

Considérons par exemple un système de trois équations différentielles de premier ordre à trois fonctions inconnues x, y, z , de la variable indépendante t ; on peut les regarder comme définissant une infinité de trajectoires d'un point mobile. Une forme différentielle $Pdx + Qdy + Rdz$ par exemple, est dite caractéristique de Cauchy si elle est nulle sur une trajectoire. On dit qu'une forme différentielle est intégrale si elle est nulle sur toutes les trajectoires.



HERMANN

Éditeurs des sciences et des arts, 156, boulevard Saint-Germain, Paris VI

1258 3/4



TABLE

CHAPITRE PREMIER.

Le principe de la moindre action d'Hamilton et le tenseur « quantité de mouvement-énergie ».

	Pages
I. — Cas du point matériel libre	1
II. — Cas général	7
III. — Transformation des équations canoniques. — Théorème de Jacobi	14

CHAPITRE II.

L'invariant intégral à deux dimensions de la Dynamique.

I. — Formation de l'invariant intégral à deux dimensions de la Dynamique	17
II. — Applications à la théorie des tourbillons.	20

CHAPITRE III.

Les invariants intégraux et les formes différentielles invariantes.

I. — Notion générale d'invariant intégral.	25
II. — Intégrales premières.	27
III. — Invariants intégraux absolus et formes différentielles invariantes.	28
IV. — Invariants intégraux relatifs. — La fonction d'Hamilton	29
V. — Exemples. — La forme « élément de matière ».	32

CHAPITRE IV.

Le système caractéristique d'une forme différentielle.

I. — La classe d'une forme différentielle	38
II. — Le système caractéristique d'une forme différentielle	39

CHAPITRE V.

Les systèmes de Pfaff invariants et leurs systèmes caractéristiques.

I. — La notion de système de Pfaff invariant.	44
II. — Le système caractéristique d'un système de Pfaff.	46
III. — Le rang d'une forme algébrique et son système associé.	48

CHAPITRE VI.

Les formes à multiplication extérieure.

	Pages
I. — Le système associé d'une forme quadratique	49
II. — Les formes bilinéaires alternées et les formes quadratiques extérieures .	50
III. — Les formes extérieures de degré supérieur à deux	55
IV. — Le système associé d'une forme extérieure.	58
V. — Formules relatives aux formes quadratiques extérieures	59

CHAPITRE VII.

Les formes différentielles extérieures et leurs formes dérivées.

I. — Le covariant bilinéaire d'une forme de Pfaff	65
II. — La dérivation extérieure	66
III. — Les formes extérieures différentielles exactes	71

CHAPITRE VIII.

Le système caractéristique d'une forme différentielle extérieure.

Formation des invariants intégraux.

I. — Le système caractéristique d'une forme différentielle extérieure . . .	74
II. — Formation des invariants intégraux	78

CHAPITRE IX.

Les systèmes différentiels qui admettent une transformation infinitésimale.

I. — La notion de transformation infinitésimale	81
II. — Formation d'invariants intégraux en partant de transformations infinitésimales	83
III. — Exemples	85
IV. — Applications au problème des n corps.	88
V. — Application à la cinématique du corps solide	92
VI. — Equations différentielles admettant une transformation infinitésimale.	93
VII. — Exprimer qu'un système d'équations différentielles données admet une transformation infinitésimale donnée	95
VIII. — Equations aux variations.	96

CHAPITRE X.

Les systèmes de Pfaff complètement intégrables.

I. — Le théorème de Frobenius.	99
II. — Formation du système caractéristique d'un système de Pfaff	101
III. — L'intégration d'un système de Pfaff complètement intégrable	102
IV. — Les systèmes complets	103

CHAPITRE XI.

La théorie du dernier multiplicateur.

I. — Définition et propriétés.	106
--	-----

	Pages
II. — Généralisations	108
III. — Cas où la variable indépendante n'est pas particularisée	109
IV. — Cas où les équations données admettent une transformation infinitésimale	110
V. — Applications	113

CHAPITRE XII.

Les équations qui admettent un invariant intégral linéaire relatif.

I. — Méthode générale d'intégration	119
II. — Les parenthèses de Poisson et l'identité de Jacobi	122
III. — Utilisation d'intégrales premières connues.	124
IV. — Généralisation du théorème de Poisson-Jacobi	127

CHAPITRE XIII.

Les équations qui admettent un invariant intégral linéaire absolu.

I. — Méthode générale d'intégration	129
II. — Généralisation des parenthèses de Poisson-Jacobi	131
III. — Utilisation d'intégrales premières connues.	134

CHAPITRE XIV.

Les équations différentielles qui admettent une équation de Pfaff invariante.

I. — Méthode générale d'intégration.	140
II. — Utilisation d'intégrales connues.	142
III. — Application aux équations aux dérivées partielles du premier ordre	144
IV. — La méthode de Cauchy	146
V. — La méthode de Lagrange	147
VI. — Equations aux dérivées partielles du premier ordre admettant une transformation infinitésimale.	148
VII. — La première méthode de Jacobi	149
VIII. — Réduction de certaines équations différentielles à une équation aux dérivées partielles du premier ordre	150
IX. — Remarques sur la nature des principales applications de la méthode de Jacobi	152

CHAPITRE XV.

Les équations différentielles qui admettent plusieurs invariants intégraux linéaires.

I. — Cas où on connaît autant d'invariants intégraux qu'il y a de fonctions inconnues.	154
II. — Le groupe qui conserve les invariants donnés.	157
III. — Exemples	159
IV. — Généralisations	160

CHAPITRE XVI.

Les équations différentielles qui admettent des transformations infinitésimales données.

	Pages
I. — Réduction du problème	162
II. — Cas où il y a autant de transformations infinitésimales que de fonctions inconnues.	165
III. — Application aux équations différentielles du second ordre	166
IV. — Généralisations. — Exemples	167

CHAPITRE XVII.

Application des théories précédentes au problème des n corps.

I. — Réduction du nombre des degrés de liberté	172
II. — Les équations du mouvement rapporté à un système de référence mobile.	177
III. — Cas où les constantes des aires sont toutes nulles	181
IV. — Cas où la constante des forces vives est nulle.	183

CHAPITRE XVIII.

Les invariants intégraux et le Calcul des variations.

I. — Les extrémales attachées à un invariant intégral linéaire	186
II. — Le principe de la moindre action de Maupertuis.	188
III. — Généralisations	190
IV. — Application à la propagation de la lumière dans un milieu isotrope	191

CHAPITRE XIX.

Le principe de Fermat et l'équation de Pfaff invariante de l'Optique.

I. — Le principe de Fermat.	196
II. — L'équation de Pfaff invariante de l'Optique	199
III. — Le principe de Fermat indépendant du repérage de l'espace-temps	201

