

20

MODULES POUR UN  
PARCOURS RÉUSSI

Sous la direction de

JEAN-PIERRE RAMIS

ANDRÉ WARUSFEL

XAVIER BUFF

JOSELIN GARNIER

EMMANUEL HALBERSTADT

THOMAS LACHAND-ROBERT

FRANÇOIS MOULIN

JACQUES SAULOY

Préface d'

ALAIN CONNES

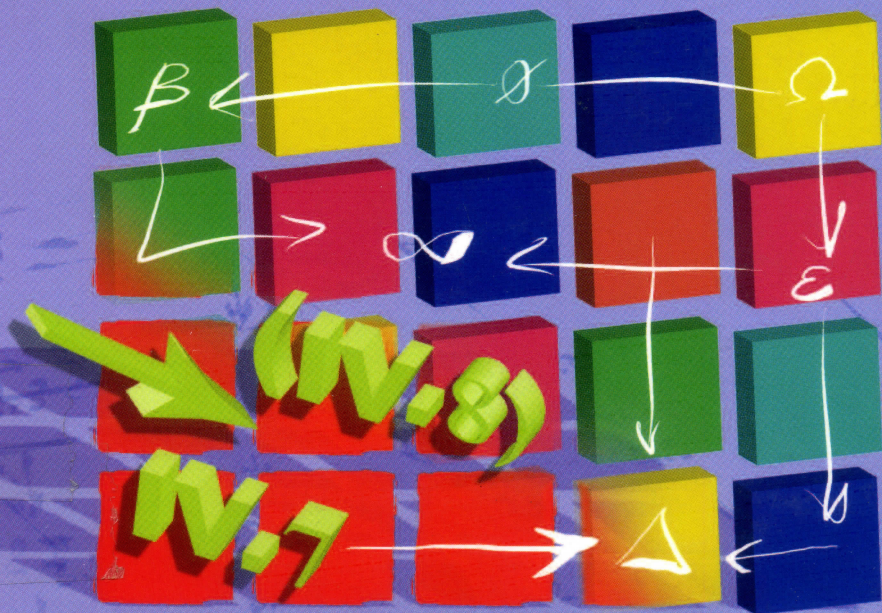
# Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence

NIVEAU

Cours complet avec 270 exercices corrigés

L1



DUNOD

M628/1

33548  
③

# MATHÉMATIQUES

## TOUT-EN-UN POUR LA LICENCE

### NIVEAU L1



Cours complet  
et 270 exercices corrigés

*Sous la direction de  
Jean-Pierre Ramis et André Warusfel*

*Xavier Buff  
Josselin Garnier  
Emmanuel Halberstadt  
Thomas Lachand-Robert  
François Moulin  
Jacques Sauloy*

DUNOD

# Table des matières

PRÉFACE	v
AVANT-PROPOS	xix
<b>I Notations et vocabulaire</b>	<b>1</b>
MODULE I.1 • FONDEMENTS	2
1 Ensembles	3
1.1 Appartenance, éléments	3
1.2 Définition en compréhension	6
1.3 Constructeurs	8
2 Applications	12
2.1 Applications et graphes	12
2.2 Images et antécédents	13
2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de $E$ dans $F$	19
3 Familles	20
3.1 Familles d'éléments d'un ensemble	20
3.2 Familles d'ensembles	21
3.3 Familles de parties d'un ensemble	23
4 Lois de composition	25
4.1 Vocabulaire général	25
4.2 Application au calcul ensembliste	29
5 Relations	29
5.1 Relations binaires sur un ensemble $E$	30
5.2 Relations d'équivalence	33
5.3 Relations d'ordre	35
6 Cardinaux	39
6.1 Induction	39
6.2 Équipotence	42
6.3 Cardinaux finis et infinis	45
7 Rudiments de logique	47
7.1 Logique propositionnelle	48
7.2 Prédicats et quantificateurs	51
7.3 Théorèmes et démonstrations	54
EXERCICES	57

# Table des matières

PRÉFACE	v
AVANT-PROPOS	xix
<b>I Notations et vocabulaire</b>	<b>1</b>
MODULE I.1 • FONDEMENTS	
1 Ensembles	2
1.1 Appartenance, éléments	3
1.2 Définition en compréhension	3
1.3 Constructeurs	6
2 Applications	8
2.1 Applications et graphes	12
2.2 Images et antécédents	12
2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de $E$ dans $F$	13
3 Familles	19
3.1 Familles d'éléments d'un ensemble	20
3.2 Familles d'ensembles	20
3.3 Familles de parties d'un ensemble	21
4 Lois de composition	23
4.1 Vocabulaire général	25
4.2 Application au calcul ensembliste	25
5 Relations	29
5.1 Relations binaires sur un ensemble $E$	29
5.2 Relations d'équivalence	30
5.3 Relations d'ordre	33
6 Cardinaux	35
6.1 Induction	39
6.2 Équipotence	39
6.3 Cardinaux finis et infinis	42
7 Rudiments de logique	45
7.1 Logique propositionnelle	47
7.2 Prédicats et quantificateurs	48
7.3 Théorèmes et démonstrations	51
EXERCICES	54
	57

# Table des matières

PRÉFACE	v
AVANT-PROPOS	xix
<b>I Notations et vocabulaire</b>	<b>1</b>
MODULE I.1 • FONDEMENTS	
1 Ensembles	2
1.1 Appartenance, éléments	3
1.2 Définition en compréhension	3
1.3 Constructeurs	6
2 Applications	8
2.1 Applications et graphes	12
2.2 Images et antécédents	12
2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de $E$ dans $F$	13
3 Familles	19
3.1 Familles d'éléments d'un ensemble	20
3.2 Familles d'ensembles	20
3.3 Familles de parties d'un ensemble	21
4 Lois de composition	23
4.1 Vocabulaire général	25
4.2 Application au calcul ensembliste	25
5 Relations	29
5.1 Relations binaires sur un ensemble $E$	29
5.2 Relations d'équivalence	30
5.3 Relations d'ordre	33
6 Cardinaux	35
6.1 Induction	39
6.2 Équipotence	39
6.3 Cardinaux finis et infinis	42
7 Rudiments de logique	45
7.1 Logique propositionnelle	47
7.2 Prédicats et quantificateurs	48
7.3 Théorèmes et démonstrations	51
EXERCICES	54
	57

## II Algèbre

63

### MODULE II.1 • ARITHMÉTIQUE

1	Ensemble des entiers naturels	64
1.1	Relations d'ordre et entiers naturels	65
1.2	Réurrence	66
1.3	Addition et multiplication des entiers naturels	66
2	Dénombrément	70
2.1	Ensembles finis, ensembles dénombrables	74
2.2	Analyse combinatoire	74
3	Divisibilité	80
3.1	Division euclidienne. Numération	85
3.2	Nombres premiers. Factorisation des entiers	85
3.3	Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide	87
4	Entiers relatifs	92
4.1	Opérations sur les entiers relatifs	96
4.2	Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ . Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	96
5	Nombres rationnels	100
	EXERCICES	105
		111

### MODULE II.2 • GROUPES, ANNEAUX, CORPS

1	Lois de composition internes	117
2	Groupes	118
2.1	Définitions, règles de calcul	125
2.2	Sous-groupes, morphismes de groupes	125
2.3	Groupe symétrique	127
2.4	Groupe additif des entiers modulo $n$	133
3	Anneaux	137
3.1	Définitions, règles de calcul	140
3.2	Sous-anneaux, idéaux, morphismes	140
3.3	Divisibilité dans un anneau intègre	145
3.4	Anneau des entiers modulo $n$	151
4	Corps	153
	EXERCICES	158
		162

### MODULE II.3 • ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1	Vocabulaire et propriétés élémentaires	169
1.1	La structure d'espace vectoriel	170
1.2	Combinaisons linéaires	170
		173

1.3	Sous-espaces vectoriels	177
2	Applications linéaires	181
2.1	Vocabulaire et exemples	181
2.2	Noyau et image	186
2.3	Quelques applications linéaires particulières	190
2.4	Espaces d'applications linéaires	193
3	Familles de vecteurs	195
3.1	Familles génératrices	195
3.2	Familles libres	198
3.3	Bases	202
3.4	Dimension finie	206
4	Sommes directes et projections	207
4.1	Somme directe de deux sous-espaces vectoriels	207
4.2	Projections	209
	EXERCICES	213
<b>MODULE II.4 • CALCUL MATRICIEL ÉLÉMENTAIRE</b>		219
1	Algèbre matricielle	219
1.1	Définitions et généralités	219
1.2	Matrices carrées	229
1.3	Matrices et applications linéaires	235
2	Opérations élémentaires et algorithmes de Gauß	239
2.1	Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes d'une matrice	240
2.2	Algorithmes de Gauß : lignes seules	244
2.3	Algorithmes de Gauß : lignes et colonnes	247
	EXERCICES	251
<b>MODULE II.5 • LE CORPS <math>\mathbb{C}</math> DES NOMBRES COMPLEXES</b>		254
1	Construction et axiomes	255
1.1	Approche axiomatique	255
1.2	Construction effective de $\mathbb{C}$	256
2	Règles élémentaires de calcul	258
2.1	Représentation cartésienne	259
2.2	Le plan d'Argand-Cauchy	261
2.3	Conjugaison	262
2.4	Module	264
2.5	Racines carrées	267

3	Représentation trigonométrique	271
3.1	Le groupe des nombres complexes de module 1.	271
3.2	Racines de l'unité	273
3.3	Arguments d'un nombre complexe	277
3.4	Racines $n^{\text{èmes}}$ des nombres complexes	279
3.5	Applications à la trigonométrie	281
4	Quelques applications géométriques	283
4.1	Similitudes planes	283
4.2	Angles de vecteurs et angles de droites	284
4.3	Constructions à la règle et au compas	286
5	Topologie de $\mathbb{C}$	287
5.1	Rappels sur la convergence dans $\mathbb{C}$	287
5.2	L'exponentielle complexe	288
5.3	Le théorème de d'Alembert-Gauß	290
	EXERCICES	292
	<b>MODULE II.6 • POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES</b>	296
1	Polynômes sur un corps quelconque	297
1.1	Construction et axiomes	297
1.2	Règles élémentaires de calcul	299
1.3	Propriétés arithmétiques des polynômes	307
1.4	Fonctions polynomiales et racines d'un polynôme	313
1.5	Polynômes dérivés	319
2	Polynômes sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	323
2.1	Applications du théorème de d'Alembert-Gauß	324
2.2	Cyclotomie	325
2.3	Polynômes de Tchebychef	328
2.4	Nombres algébriques	330
3	Fractions et fonctions rationnelles	333
3.1	Le corps $K(X)$ des fractions rationnelles	333
3.2	Propriétés arithmétiques de $K(X)$	336
3.3	Fonctions rationnelles	340
3.4	Développements limités	342
	EXERCICES	343
	<b>MODULE II.7 • ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE</b>	349
1	Espaces vectoriels de dimension finie	350
1.1	Définition de la dimension	350
1.2	Applications linéaires en dimension finie	357

2	Applications linéaires et matrices	361
2.1	Écriture matricielle d'une application linéaire	361
2.2	Changements de bases	368
3	Déterminants	371
3.1	Déterminant d'une matrice carrée	372
3.2	Mineurs d'une matrice	378
3.3	Déterminant d'un endomorphisme	385
3.4	Valeurs propres et vecteurs propres	390
4	Systèmes linéaires	397
4.1	Équations linéaires	397
4.2	Systèmes linéaires	399
	EXERCICES	406
<b>MODULE II.8 • INITIATION À L'ALGORITHMIQUE ET AU CALCUL FORMEL</b>		414
1	Exemple introductif : l'addition en base $b$	415
1.1	L'algorithme d'addition	416
1.2	Analyse de l'algorithme d'addition	422
2	Vocabulaire	424
2.1	Langage algorithmique simplifié	424
2.2	Des mathématiques aux algorithmes	428
2.3	Un exemple détaillé : l'algorithme d'Euclide	432
3	Quelques exemples fondamentaux	434
3.1	L'exponentiation dichotomique	435
3.2	Tris et permutations	437
3.3	Polynômes	442
	EXERCICES	446
<b>III Géométrie</b>		<b>449</b>
<b>MODULE III.1 • GÉOMÉTRIE DANS LES ESPACES AFFINES</b>		450
1	Espaces affines	451
1.1	Structure d'espace affine	451
1.2	Barycentres	453
1.3	Sous-espaces affines	455
1.4	Applications affines	457
2	Représentation des sous-espaces affines	462
2.1	Hyperplans	462
2.2	Repère	465

2.3	Systèmes d'équations	466
3	Géométrie affine dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$	468
3.1	Droites de $\mathbb{R}^2$	468
3.2	Plans de $\mathbb{R}^3$	472
3.3	Droites de $\mathbb{R}^3$	476
3.4	Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	479
4	Les coniques	484
4.1	Cercles	485
4.2	Coniques	486
4.3	Équations de degré 2	491
	EXERCICES	495
<b>MODULE III.2 • COURBES PARAMÉTRÉES</b>		499
1	Courbes planes	500
1.1	Notion de courbe paramétrée	500
1.2	Étude locale	502
1.3	Deux exemples	511
2	Courbes en coordonnées polaires	516
2.1	Définition	516
2.2	Tangente	517
2.3	Branches infinies	518
3	Étude métrique d'une courbe plane	519
3.1	Longueur d'une courbe	519
3.2	Paramétrage normal	521
3.3	Courbure	524
3.4	Théorème fondamental	529
4	Courbes de l'espace	532
4.1	Tangente et plan osculateur	532
4.2	Courbure, torsion	535
4.3	Théorème fondamental	537
	EXERCICES	537
<b>IV</b>	<b>Analyse</b>	<b>543</b>
<b>MODULE IV.1 • NOMBRES RÉELS, SUITES NUMÉRIQUES</b>		544
1	Bornes inférieures et supérieures ✕	545
2	Développement décimal ✕	547
3	Définition des nombres réels ; relation d'ordre ✕	549

4	Théorème de la borne supérieure ✕	552
4.1	Bornes supérieures et bornes inférieures ✕	552
4.2	Intervalles ✕	555
5	Opérations sur les réels ✓	556
6	Suites numériques, introduction ✓	559
6.1	Suites bornées et opérations ✓	560
6.2	Suites arithmétiques ✕	561
6.3	Suites géométriques ✕	562
7	Convergence des suites ✓	564
7.1	Suite positive tendant vers zéro ✕	566
7.2	Limites des suites ✓	568
7.3	Premières propriétés ✕	570
7.4	Conservation ✓	570
7.5	Exemples ✕	571
8	Opérations sur les limites ✓	572
9	Suites réelles ✕	575
9.1	Comparaison de suites ✕	575
9.2	Suites monotones	576
9.3	Suites adjacentes	577
9.4	Suites bornées	578
9.5	Limites infinies	579
	EXERCICES	583
	<b>MODULE IV.2 • FONCTIONS RÉELLES</b> ✓	587
1	Continuité	588
1.1	Limite d'une fonction ✓	588
1.2	Continuité ✕	589
1.3	Opérations sur les fonctions continues ✓	592
1.4	Théorème des valeurs intermédiaires	593
1.5	Image continue d'un intervalle	594
1.6	Le théorème des bornes	595
1.7	Fonctions continues par morceaux	596
2	Dérivabilité	596
2.1	Opérations sur les dérivées	598
2.2	Dérivées d'ordre $n$	600
2.3	Sens de variation et extrema	601
2.4	Théorème de Rolle, accroissements finis	602

3	Réciproque d'une fonction	605
3.1	Continuité de la réciproque	605
3.2	Dérivée de la réciproque	606
4	Étude d'une fonction	607
4.1	Définition et variations	608
4.2	Branches infinies	608
	EXERCICES	610
<b>MODULE IV.3 • FONCTIONS TRANSCENDANTES</b>		614
1	L'exponentielle	615
2	Exponentielle réelle	619
3	Logarithme	623
4	Fonctions trigonométriques	624
5	Fonctions tangente et arc-tangente	629
6	Arc-sinus et arc-cosinus	631
7	Trigonométrie hyperbolique	633
8	Réciproques des fonctions hyperboliques	636
9	Résumé des dérivées des fonctions usuelles	639
	EXERCICES	640
<b>MODULE IV.4 • SÉRIES NUMÉRIQUES</b>		643
1	Convergence d'une série	644
1.1	Définitions	644
1.2	Premiers résultats	648
2	Séries à termes réels positifs	651
3	Séries alternées	661
	EXERCICES	664
<b>MODULE IV.5 • INTRODUCTION À L'INTÉGRATION</b>		669
1	Aires et sommes de Riemann	669
2	Continuité et intégrabilité	672
2.1	Propriétés élémentaires	673
2.2	La relation de Chasles	675
2.3	Comparaison d'intégrales et moyenne	676
2.4	Signification géométrique de l'intégrale	679
3	Intégration et dérivation, calcul des intégrales	680
3.1	Le théorème fondamental de l'analyse	680
3.2	Table des primitives de fonctions élémentaires	682

4	Calcul effectif d'intégrales	683
4.1	Intégration par parties	683
4.2	Changement de variables	685
4.3	Quel changement de variable choisir ?	688
4.4	Intégration des fractions rationnelles	693
	EXERCICES	696
<b>MODULE IV.6 • INTRODUCTION AUX FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE</b>		700
1	Suites vectorielles	700
1.1	Distance entre deux vecteurs	701
1.2	Convergence de suites	704
1.3	Suites vectorielles définies par une récurrence linéaire	706
1.4	Suites réelles définies par une récurrence d'ordre 2	709
2	Fonctions vectorielles	711
2.1	Continuité	711
2.2	Dérivabilité	713
2.3	Opérations sur les dérivées	714
2.4	Inégalité des accroissements finis	716
2.5	Intégration	718
3	Équations différentielles linéaires	720
3.1	Équations scalaires d'ordre 1	721
3.2	Équations vectorielles d'ordre 1	725
3.3	Allure des solutions d'une équation homogène en dimension 2.	730
3.4	Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants	735
	EXERCICES	740
<b>MODULE IV.7 • PREMIÈRE INITIATION AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES</b>		744
1	Continuité	746
1.1	Ouverts, fermés et compacts	746
1.2	Fonctions continues	749
1.3	Théorème des bornes	750
1.4	Norme d'une application linéaire	751
2	Différentiabilité	752
2.1	Dérivées partielles	752
2.2	Dérivée suivant un vecteur	754
2.3	Différentielle	755
2.4	Matrice Jacobienne	756

3	Propriétés fondamentales	758
3.1	Opérations élémentaires	758
3.2	Différentielle d'une application composée	761
3.3	Applications continûment différentiables	764
3.4	Théorème des accroissements finis	766
4	Applications de la notion de différentiabilité	768
4.1	Plan tangent au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	768
4.2	Dérivation sur $\mathbb{C}$	773
	EXERCICES	777
<b>MODULE IV.8 • APPROXIMATION</b>		781
1	Introduction	781
2	Formules de Taylor	783
3	Extensions aux fonctions vectorielles	786
4	Équivalents et notations de Landau	786
4.1	Équivalents	787
4.2	Notations de Landau	791
5	Développements limités	794
5.1	Détermination d'un développement limité	796
5.2	Opérations sur les développements limités	797
5.3	Développement limité à l'infini	805
	EXERCICES	807
<b>V</b>	<b>Probabilités statistiques</b>	<b>813</b>
<b>MODULE V.1 • STATISTIQUE ÉLÉMENTAIRE ET PROBABILITÉS FINIES</b>		814
1	Introduction à la statistique descriptive	815
1.1	Données statistiques	815
1.2	Représentation des données	817
2	Statistique descriptive univariée	822
2.1	Mesures de tendance centrale	822
2.2	Mesures de dispersion	825
3	Statistique descriptive bivariée	828
3.1	Ajustement linéaire par moindres carrés	830
3.2	Covariance et corrélation	832
3.3	Corrélation et régression	833

4	Introduction aux probabilités	835
4.1	Expériences aléatoires, événements	835
4.2	Espace de probabilité fini	838
5	Combinatoire	842
5.1	Généralités sur le dénombrement	842
5.2	Dénombrements classiques	844
5.3	Dénombrement appliqué au loto	846
6	Conditionnement et indépendance	848
6.1	Probabilité conditionnelle	848
6.2	Probabilités composées, formule des probabilités totales	849
6.3	Formule de Bayes	852
6.4	Indépendance de deux événements	853
6.5	Indépendance de familles d'événements	856
	EXERCICES	858
	INDEX	862