

OBJECTIF
LICENCE

3^e année

Sous la direction de GUY AULIAC
GUY AULIAC – JEAN-YVES CABY

MATHÉMATIQUES

Topologie et analyse

50% COURS
+ 50% EXOS
= 100%
EFFICACE

EdiScience

M626 T2/1



33475
⑤

MATHÉMATIQUES

Topologie et analyse



50 % cours + 50 % exos

Sous la direction de
Guy Auliac

Professeur agrégé à l'Université de Marne-la-Vallée

Jean-Yves Caby

Professeur agrégé

Enseigne à l'Université de Marne-la-Vallée



Table des matières

AVANT-PROPOS	VII
CHAPITRE 1 • ESPACES MÉTRIQUES	
1.1 Espaces métriques	1
1.2 Suites. Suites de Cauchy	3
1.3 Notions métriques	7
1.4 Notions topologiques	9
1.5 Distance induite sur une partie	14
1.6 Intérieur. Adhérence	15
EXERCICES	22
SOLUTIONS DES EXERCICES	26
CHAPITRE 2 • CONTINUITÉ DANS LES ESPACES MÉTRIQUES	
2.1 Limite et continuité en un point	34
2.2 Continuité et continuité uniforme	39
2.3 Théorème du point fixe	44
2.4 Homéomorphisme	45
2.5 Équivalences de distances	47
EXERCICES	50
SOLUTIONS DES EXERCICES	54
CHAPITRE 3 • COMPACTITÉ. CONNEXITÉ	
3.1 Compacts	64
3.2 Continuité et compacité	70
3.3 Compacité et recouvrements ouverts	73
3.4 Connexité	76
EXERCICES	84
SOLUTIONS DES EXERCICES	88
CHAPITRE 4 • ESPACES VECTORIELS NORMÉS	
4.1 Normes et espaces de Banach	96
4.2 Quelques propriétés spécifiques	101

4.3	Linéarité et continuité	106
4.4	Espaces de dimension finie	113
4.5	Séries dans un espace vectoriel normé	117
4.6	Algèbres de Banach	126
	EXERCICES	128
	SOLUTIONS DES EXERCICES	134
CHAPITRE 5 • APPROXIMATIONS UNIFORMES		
5.1	Convergences simple et uniforme	149
5.2	Convergence uniforme et continuité	153
5.3	Fonctions réglées	158
5.4	Théorèmes de Stone et de Weierstrass	162
5.5	Convergence uniforme et séries de Fourier	167
	EXERCICES	176
	SOLUTIONS DES EXERCICES	182
CHAPITRE 6 • FAMILLES SOMMABLES		
6.1	Ensembles dénombrables	199
6.2	Familles sommables de nombres positifs	203
6.3	Familles sommables de nombres complexes	212
6.4	Les espaces ℓ^p	222
6.5	Produits infinis de nombres complexes	225
	EXERCICES	232
	SOLUTIONS DES EXERCICES	235
CHAPITRE 7 • CALCUL DIFFÉRENTIEL		
7.1	Différentiabilité	246
7.2	En dimension finie	259
	EXERCICES	283
	SOLUTIONS DES EXERCICES	287
CHAPITRE 8 • INVERSION LOCALE		
8.1	Difféomorphisme local	298
8.2	Inversion locale	300
8.3	Fonctions implicites	302
8.4	Applications géométriques	309
8.5	Sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^p	313
8.6	Problème de Cauchy et fonction implicite	318
	EXERCICES	320
	SOLUTIONS DES EXERCICES	325

CHAPITRE 9 • FONCTIONS HOLOMORPHES

9.1	Dérivation complexe	338
9.2	Conditions de Cauchy-Riemann	341
9.3	Somme d'une série entière	345
9.4	Logarithmes	350
9.5	Fonctions analytiques ou holomorphes	353
	EXERCICES	360
	SOLUTIONS DES EXERCICES	362

CHAPITRE 10 • THÉORIE DE CAUCHY

10.1	Intégration le long d'un arc	370
10.2	Primitives d'une fonction	373
10.3	Théorème de Cauchy	376
10.4	Indice. Formule intégrale de Cauchy	381
10.5	Développement en série de Laurent	385
10.6	Le théorème des résidus	390
10.7	Calcul d'intégrales par résidus	394
10.8	Exemples de transformées de Fourier	399
	EXERCICES	402
	SOLUTIONS DES EXERCICES	405

INDEX	413
--------------	------------