

l'intégrale

Jean-Marie Monier

Analyse PCSI-PTSI

Cours
et 800 exercices
corrigés

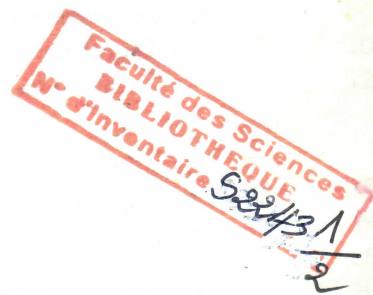
**NOUVEAU
PROGRAMME**

4^e édition

DUNOD

Analyse PCSI-PTSI

Cours et 800 exercices corrigés



Jean-Marie Monier

*Professeur en classes de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*

4^e édition



DUNOD

Table des matières



Cours

Chapitre 0

Programme de début d'année, analyse	3
0.1 Nombres complexes	3
0.1.1 Calculs algébriques sur les nombres complexes	3
0.1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	6
0.1.3 Applications trigonométriques des nombres complexes	10
0.1.4 Interprétation géométrique des nombres complexes	12
0.2 Fonctions usuelles	18
0.2.1 Logarithme népérien	18
0.2.2 Exponentielle	19
0.2.3 Logarithme de base a	20
0.2.4 Exponentielle de base a	20
0.2.5 Fonctions puissances	21
0.2.6 Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles	22
0.2.7 Fonctions hyperboliques directes	22
0.2.8 Fonctions hyperboliques réciproques	24
0.2.9 Fonctions circulaires directes	27
0.2.10 Fonctions circulaires réciproques	31
0.2.11 Exponentielle complexe	33
0.3 Équations différentielles linéaires	35
0.3.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre	35
0.3.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre exponentielle-polynôme	40

Chapitre 1

Les nombres réels	47
1.1 Préambule	47
1.2 Nombres réels	48
1.2.1 Existence et unicité de \mathbb{R}	48
1.2.2 Propriétés élémentaires des nombres réels	51
1.2.3 Propriétés fondamentales de \mathbb{R}	54
1.3 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$	62
Compléments	63

Chapitre 2

Les nombres complexes

65

2.1	Préambule	66
2.2	Corps des nombres complexes	66
2.2.1	Définition	66
2.2.2	Conjugaison, partie réelle, partie imaginaire	67
2.2.3	Module	69
2.2.4	Arguments	71
2.3	Interprétation géométrique des nombres complexes	72
2.3.1	Plan complexe	72
2.3.2	Interprétation géométrique de l'addition dans \mathbb{C}	73
2.3.3	Interprétation géométrique de la multiplication dans \mathbb{C}	74
2.3.4	Applications $z \mapsto az + b$	74
2.3.5	CNS d'alignement de trois points du plan complexe	75
2.3.6	CNS de cocyclicité ou alignement de quatre points du plan complexe	75
2.4	Puissances et racines	75
2.4.1	Exponentielle d'un imaginaire pur	75
2.4.2	Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul	76
2.4.3	Racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	79
2.4.4	Groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	80
2.5	Applications trigonométriques des nombres complexes	80
2.5.1	Développement de $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $\tan n\theta$	80
2.5.2	Linéarisation de $\cos^p \theta$, $\sin^p \theta$, $\cos^p \theta \sin^q \theta$	81
	Compléments	84

Chapitre 3

Suites numériques

85

3.1	Convergence, divergence	86
3.1.1	Définitions	86
3.1.2	Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes	88
3.1.3	Propriétés algébriques des suites convergentes	90
3.1.4	Exemples élémentaires de suites	95
3.2	Monotonie	99
3.2.1	Suites réelles monotones	99
3.2.2	Suites adjacentes	102
3.3	Suites extraites	105
3.4	Quelques types usuels de suites	107
3.4.1	Suites récurrentes affines du 1 ^{er} ordre à coefficients constants	107
3.4.2	Suites récurrentes linéaires du 2 ^e ordre à coefficients constants	107
3.4.3	Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$	111
	Compléments	117

Chapitre 4

Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

121

4.1	Algèbre des fonctions	122
4.1.1	Algèbre \mathbb{K}^X	122
4.1.2	Relation d'ordre dans \mathbb{R}^X	124
4.1.3	Parité	126
4.1.4	Périodicité	127
4.1.5	Applications en escalier sur un segment	129
4.1.6	Applications polynomiales, applications rationnelles	130
4.1.7	Monotonie	130
4.1.8	Applications majorées, minorées, bornées	132
4.2	Limites	134
4.2.1	Notion de limite	134
4.2.2	Ordre et limite	137
4.2.3	Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite	139
4.2.4	Cas des fonctions monotones	143
4.3	Continuité	144
4.3.1	Définitions	144
4.3.2	Opérations algébriques sur les applications continues	148
4.3.3	Continuité sur un intervalle	150
4.3.4	Continuité sur un segment	153
4.3.5	Application réciproque	155
4.3.6	Applications lipschitziennes	158

Chapitre 5

Dérivation

161

5.1	Dérivées	161
5.1.1	Dérivée en un point	161
5.1.2	Propriétés algébriques des fonctions dérivables en un point	165
5.1.3	Application dérivée	168
5.1.4	Dérivées successives	171
5.1.5	Classe d'une fonction	174
5.1.6	Différentielle	176
5.2	Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis	177
5.2.1	Théorème de Rolle	177
5.2.2	Théorème des accroissements finis	179
5.3	Variations des fonctions	182
5.3.1	Etude de la monotonie pour une fonction dérivable	182
5.3.2	Etude des extremums pour une fonction dérivable	187
5.4	Fonctions convexes	189
5.4.1	Définition	189
5.4.2	Utilisation de dérivées dans l'étude de la convexité	193
5.4.3	Inégalités de convexité	199

Chapitre 6

Intégration

203

6.1	Intégration des applications en escalier sur un segment	204
6.1.1	Algèbre des applications en escalier sur un segment	204
6.1.2	Intégrale d'une application en escalier sur un segment	205
6.2	Intégration des applications continues par morceaux sur un segment	208
6.2.1	Algèbre des applications continues par morceaux sur un segment	208
6.2.2	Approximation d'une application continue par morceaux sur un segment par des applications en escalier	209
6.2.3	Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment	209
6.2.4	Propriétés algébriques	211
6.2.5	Propriétés relatives à l'ordre	213
6.2.6	Relation de Chasles	217
6.2.7	Sommes de Riemann	219
6.3	Extension aux fonctions à valeurs complexes	222
6.4	Intégration et dérivation	224
6.4.1	Intégrale fonction de la borne d'en haut	224
6.4.2	Primitives	226
6.4.3	Changement de variable	228
6.4.4	Intégration par parties	229
6.4.5	Formule de Taylor avec reste intégral	232
6.4.6	Approximation d'une intégrale, méthode des rectangles, méthode des trapèzes	234

Chapitre 7

Fonctions usuelles

239

7.1	Logarithme népérien	240
7.2	Exponentielle	242
7.3	Logarithmes et exponentielles de base a	243
7.3.1	Logarithme de base a	243
7.3.2	Exponentielle de base a	244
7.4	Puissances	246
7.5	Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles	248
7.6	Fonctions hyperboliques directes	250

Chapitre 8

7.7	Fonctions hyperboliques réciproques	253
7.7.1	Argsh	253
7.7.2	Argch	254
7.7.3	Argth	255
7.7.4	Supplément : Argcoth	256
7.8	Fonctions circulaires directes	258
7.9	Fonctions circulaires réciproques	263
7.9.1	Arcsin	263
7.9.2	Arccos	264
7.9.3	Arctan	265
7.10	Exponentielle complexe	269
	Compléments aux exercices	270
	Comparaison locale des fonctions	273
8.1	Prépondérance, domination	274
8.1.1	Définitions	274
8.1.2	Opérations relatives à la prépondérance et à la domination	275
8.1.3	Exemples usuels	277
8.2	Équivalence	278
8.2.1	Définition	278
8.2.2	Opérations relatives à l'équivalence	280
8.2.3	Équivalents usuels	282
8.2.4	Exemples d'utilisation d'équivalents	283
8.3	Développements limités	285
8.3.1	Généralités	285
8.3.2	Le théorème de Taylor-Young	289
8.3.3	Dérivation et primitivation pour un $DL(0)$	291
8.3.4	Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$	293
8.3.5	Exemples d'utilisation de développements limités	300
8.4	Notion de développement asymptotique	303
8.4.1	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}$	303
8.4.2	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	304
8.4.3	Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles	305
8.5	Étude pratique d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , représentation graphique	307

Chapitre 9

Calculs de primitives 311

9.1	Préambule	311
9.2	Changement de variable	313
9.3	Primitivation par parties	315
9.4	Liste des primitives usuelles	320
9.5	Primitivation des fonctions rationnelles	322
9.6	Exemples : Primitivation de fonctions rationnelles en certains fonctions usuelles	326
9.6.1	Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$	326
9.6.2	Fonctions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$	332
9.6.3	Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$	333
9.6.4	Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	334
9.6.5	Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$	335

Chapitre 10

Équations différentielles (1^{re} étude) 341

10.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	342
10.1.1	Généralités	342
10.1.2	Résolution de l'équation sans second membre	343
10.1.3	Résolution de l'équation avec second membre	346
10.2	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme	354
10.2.1	Généralités	354
10.2.2	Résolution de l'équation sans second membre	355
10.2.3	Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme	358
10.3	Supplément : exemples d'étude d'équations différentielles non linéaires du premier ordre	363
10.3.1	Généralités	363
10.3.2	Équations différentielles à variables séparables	365
10.3.3	Équations homogènes	367
10.3.4	Équations de Bernoulli	369
10.3.5	Équations de Riccati	370
10.3.6	Équations incomplètes en x	371
10.3.7	Équations incomplètes en y	373
10.3.8	Équations de Lagrange et Clairaut	374

Notions sur les fonctions de deux variables réelles

377

11.1	Espace \mathbb{R}^2 , suites dans \mathbb{R}^2	378
11.1.1	Espace \mathbb{R}^2	378
11.1.2	Parties ouvertes	381
11.1.3	Suites dans \mathbb{R}^2	382
11.2	Limites, continuité	383
11.2.1	Limites	383
11.2.2	Continuité	384
11.2.3	Continuité partielle	387
11.3	Dérivées partielles premières	390
11.3.1	Définitions	390
11.3.2	Applications de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2	391
11.4	Dérivées partielles successives	401
11.4.1	Généralités	401
11.4.2	Applications de classe C^k sur un ouvert de \mathbb{R}^2	402
11.4.3	Interversion des dérivations	403
11.5	Extremums des fonctions numériques de deux variables réelles	406
11.5.1	Définitions	406
11.5.2	Étude à l'ordre 1	407
11.5.3	Extremums globaux	408
11.6	Supplément : formes différentielles	410
11.6.1	Définitions	410
11.6.2	Formes différentielles exactes	410
11.6.3	Formes différentielles fermées	411
11.6.4	Plan d'étude d'une forme différentielle, exemples	413
11.6.5	Application à certaines équations différentielles du premier ordre	420
11.7	Analyse vectorielle	421
11.7.1	Définitions	421
11.7.2	Formules d'analyse vectorielle	422
11.7.3	Potentiel scalaire	423

Compléments de calcul intégral (1^{re} étude) 425

12.1	Intégrales curvilignes	426
12.1.1	Arcs orientés, courbes orientées	426
12.1.2	Définition de l'intégrale curviligne	428
12.1.3	Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne	430

12.1.4	Intégrale curviligne et forme différentielle exacte	434
12.1.5	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée	437
12.1.6	Calculs d'aires planes	438
12.2	Intégrales doubles	441
12.2.1	Parties quarrables de \mathbb{R}^2	441
12.2.2	Définition de l'intégrale double	446
12.2.3	Propriétés élémentaires de l'intégrale double	448
12.2.4	Théorème de Fubini	450
12.2.5	Changement de variables dans une intégrale double	453
12.2.6	Formule de Green-Riemann	457
12.3	Intégrales triples	459
12.3.1	Parties cubables de \mathbb{R}^3	459
12.3.2	Définition de l'intégrale triple	459
12.3.3	Propriétés élémentaires de l'intégrale triple	459
12.3.4	Théorème de Fubini	460
12.3.5	Changement de variables dans une intégrale triple	461
12.4	Masses, centres d'inertie, moments d'inertie	464
12.4.1	Systèmes matériels	464
12.4.2	Masse d'un système matériel	464
12.4.3	Centre d'inertie d'un système matériel	467
12.4.4	Moments d'inertie d'un système matériel	470

Indications et réponses des exercices

Chap. 0	477
Chap. 1	491
Chap. 2	503
Chap. 3	513
Chap. 4	527
Chap. 5	533
Chap. 6	545
Chap. 7	557
Chap. 8	571
Chap. 9	585
Chap. 10	595
Chap. 11	603
Chap. 12	613
Index des notations	629
Index alphabétique	631

Jean-Marie Monier

4^e édition

ANALYSE PCSI-PTSI

Cours et 800 exercices corrigés

Cette 4^e édition du *cours d'analyse* de Jean-Marie Monier est entièrement conforme aux nouveaux programmes 2003 des filières PCSI et PTSI. Elle propose un cours complet, convivial et rigoureux, et de très nombreux exercices tous corrigés.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1^{er} cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

JEAN-MARIE MONIER
est professeur en classe
de Spéciales au lycée
La Martinière-Monplaisir
à Lyon.

COURS		EXERCICES		
1 ^{re} année	2 ^e année	1 ^{re} année	2 ^e année	
Analyse MPSI	Analyse MP	Analyse MPSI	Analyse MP	MPSI MP
Algèbre MPSI	Algèbre MP	Algèbre et géométrie MPSI	Algèbre et géométrie MP	
Géométrie MPSI, MP				
Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	Analyse PCSI-PTSI	Analyse PC-PSI-PT	PCSI-PTSI PC-PSI-PT
Algèbre PCSI-PTSI	Algèbre PC-PSI-PT	Algèbre et géométrie PCSI-PTSI	Algèbre et géométrie PC-PSI-PT	
Géométrie PCSI-PTSI, PC-PSI-PT				
L'ORAL				
Niveau X, Centrale, Mines		Niveau CCP, e3a, e4a, ESIM		
337 exercices corrigés		409 exercices corrigés		MP-MP*
264 exercices corrigés		324 exercices corrigés		PC-PC*-PSI-PSI*-PT-PT*

