

Probabilités et Statistique appliquées



Résumé de cours et illustrations



CÉPADUÈS-ÉDITIONS

• B. LACAZE
C. MAILHES
M. MAUBOURGUET
J.-Y. TURNERET



33654
⑤

M 605/17

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE APPLIQUÉES

Résumé de cours et illustration

B. LACAZE, C. MAILHES,
M. MAUBOURGUET, J.-Y. TOURNERET

ENSEEIH
École Nationale Supérieure d'Électrotechnique,
d'Électronique, d'Informatique
et d'Hydraulique de Toulouse

Collection POLYTECH
de l'I.N.P. de Toulouse
(co-direction de MM. Raymond Crampagne et Philippe Morard)

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

111, rue Vauquelin
31100 TOULOUSE – France
Tél. : 05 61 40 57 36 – Fax : 05 61 41 79 89
(de l'étranger) + 33 5 61 40 57 36 – Fax : + 33 5 61 41 79 89
www.cepades.com
Courriel : cepades@cepades.com

Table des matières

1	Eléments de calcul des probabilités	9
1	Triplet de probabilité $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, P)$	9
1.1	Résultats d'expériences et événements	9
1.2	Probabilité	11
1.3	Interprétation	12
2	Dénombrements	12
2.1	Utilisation	12
2.2	Tirage dans une urne à deux catégories	13
3	Probabilités géométriques	14
4	Probabilités conditionnelles	18
4.1	Définition	18
4.2	Théorème des probabilités totales	19
4.3	Formule de Bayes	19
4.4	Indépendance	19
5	Exercices corrigés	28
5.1	Triplet de probabilité	28
5.2	Combinatoire	30
5.3	Urnés	33
5.4	Dés et cartes	37
5.5	Probabilités géométriques	41
5.6	Indépendance	45
5.7	Probabilités conditionnelles	50
2	Variables Aléatoires	57
1	Définitions	57
1.1	Variables aléatoires réelles	57
1.2	Variables aléatoires discrètes	57
1.3	Variables aléatoires continues	58
1.4	Fonction de répartition	58
2	Lois fondamentales	58
2.1	Loi binomiale $B(n, p)$	58

- 2.2 Loi de Poisson $P(\lambda)$ 59
- 2.3 Loi uniforme sur $[a, b]$ 59
- 2.4 Loi normale $\mathcal{N}(a, b^2)$ 59
- 3 Espérance mathématique 60

analyse descriptive des données
caractéristiques de tendance centrale et de dispersion
calcul des probabilités
variables aléatoires, loi binomiale, loi de Poisson et loi géométrique
variables continues: loi normale, la loi normale et la loi exponentielle
estimation et tests d'hypothèses
tests statistiques sur l'égalité de plusieurs moyennes
comparaison de proportions
jeu croisé
régression linéaire et corrélation

Les Éditions SMG
5365 boul Jean X
Trois-Rivières-Ou
Tel.: (819) 376-56
Télécopie: (819)
 Distributeur exclusif pour
Technique et Docum
14 rue de Provigny
F-94236 Cachan ced

- 3.1 Définition
- 3.2 Propriétés
- 3.3 Moments et relations entre les moments
- 3.4 Fonctions génératrices
- 3.5 Mesures de position et de dispersion
- 4 Exemples de calcul de moments
- 4.1 Loi binomiale $B(n, p)$
- 4.2 Loi normale $\mathcal{N}(a, b^2)$
- 5 Changements de variable
- 5.1 Définition
- 5.2 Cas discret
- 5.3 Cas continu
- 6 Exemples de changements de variable
- 7 Exercices corrigés
- 7.1 Variable aléatoire discrète : calcul de la loi et des paramètres
- 7.2 Variable aléatoire continue : calcul de la loi et des paramètres
- 7.3 Loi définie par morceaux : calcul de la loi et des paramètres
- 7.4 Changements de variable
- 7.5 Loi normale
- 7.6 Loi de Poisson

3 Couples de variables aléatoires

- 1 Définitions
- 1.1 Couples de variables aléatoires
- 1.2 Variables aléatoires discrètes
- 1.3 Variables aléatoires continues
- 2 Lois marginales
- 2.1 Définition
- 2.2 Exemples
- 3 Lois conditionnelles
- 3.1 Cas discret
- 3.2 Cas continu
- 3.3 Exemples
- 4 Indépendance

	4.1	Définition	99
	4.2	Exemples	100
5		Espérance mathématique	101
	5.1	Définition	101
	5.2	Propriétés	101
	5.3	Moments, fonction génératrice des moments et fonction caractéristique	102
	5.4	Lien avec l'indépendance	103
	5.5	Interprétation du coefficient de corrélation	103
	5.6	Espérance mathématique conditionnelle	103
	5.7	Exemples	104
6		Changements de variables	105
	6.1	Définition	105
	6.2	Exemple	106
7		Somme de variables aléatoires	107
	7.1	Méthode géométrique	107
	7.2	Méthode du jacobien	108
	7.3	Méthode des fonctions caractéristiques	109
8		Théorèmes limites	110
	8.1	Loi des grands nombres	110
	8.2	Le théorème de la limite centrale	111
9		Exercices corrigés	112
	9.1	Lois discrètes	112
	9.2	Lois continues	115
	9.3	Lois conditionnelles - Indépendance	122
	9.4	Fonctions génératrices, fonctions caractéristiques	131
	9.5	Changements de variables	134
	9.6	Calculs de moments	143
	9.7	Théorèmes limites	154
4		Loi normale à n dimensions	161
	1	Définition	161
	2	Propriétés	161
	2.1	Fonction caractéristique	161
	2.2	Moyenne et matrice de covariance	162
	2.3	Lois marginales	162
	2.4	Transformation linéaire	162
	2.5	Indépendance	162
	2.6	Lois conditionnelles	163
3		Lois liées à la loi normale	163
	3.1	Loi du χ_n^2	163

3.2	Lois du t (de Student) et du F (de Fisher-Snedecor) . . .	164
3.3	Caractérisations de la loi normale	165
4	Exercices corrigés	167
4.1	Exercice de synthèse	167
4.2	Calcul de moments	173
4.3	Changement linéaire de variables et indépendance . . .	181
4.4	Lois construites à partir de la loi normale	186
4.5	Changement non linéaire de variables	193
5	Estimation de paramètres	199
1	Introduction	199
2	Exemples	200
2.1	Estimation de la moyenne (loi des grands nombres) . .	200
2.2	Estimation de la variance	200
3	Inégalité de Rao-Cramer	201
3.1	Inégalité de Rao-Cramer	201
3.2	Cas particuliers	202
3.3	Estimateur efficace	202
3.4	Inégalité dans le cas multidimensionnel	203
4	Maximum de vraisemblance	203
4.1	Définition	203
4.2	Exemples	204
5	Régression linéaire	205
6	Estimation des lois de probabilités	209
6.1	Théorème de Bernoulli	209
6.2	Théorème de Kolmogorov-Smirnov ($F(x)$ continue) . .	210
7	Exercices corrigés	211
7.1	Variables aléatoires discrètes	211
7.2	Variables aléatoires continues	222
7.3	Variables aléatoires mixtes	238
6	Notions sur les tests statistiques	243
1	Introduction	243
1.1	Définition	243
1.2	Les risques	243
1.3	Exemples	244
2	Tests paramétriques	245
2.1	Test de Neyman-Pearson	246
2.2	Procédure de Bayes	246
2.3	Tests usuels sur la moyenne et la variance dans le cas gaussien	248

3	Tests non paramétriques	251
3.1	Test du χ^2	251
3.2	Tests de Kolmogorov	252
4	Exercices corrigés	253
7	Compléments de calcul des probabilités	283
1	Triplet de probabilité $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, P)$	283
1.1	Définition	283
1.2	Boréliens	284
1.3	Produits cartésiens	284
2	Variable aléatoire	284
3	L'intégrale de Lebesgue	285
3.1	L'intégrale de Riemann-Stieltjes	285
3.2	L'intégrale de Lebesgue	285
4	Convergences	288
4.1	Convergence en Loi (\mathcal{L})	288
4.2	Convergences en Probabilité (p) et presque sûre ($p.s$)	289
4.3	Convergence en moyenne quadratique ($m.q$)	289
4.4	Comparaison des types de convergence	290
4.5	Séries de variables aléatoires	290
8	Problèmes généraux	291
9	Annexes	329
	Bibliographie	361
	Index	363

Probabilités et Statistique appliquées

B. LACAZE, C. MAILHES, M. MAUBOURGUET, J.-Y. TOURNERET

LE CALCUL des probabilités intervient dès que l'on désire quantifier une part d'incertitude. Ainsi, le trouve-t-on utilisé en théorie de la fiabilité, des sondages, de l'hérédité ou dans l'étude de l'évolution des systèmes à grand nombre d'éléments...

Le lecteur découvrira pas-à-pas les principes et les techniques du calcul des probabilités et de la statistique. Chaque chapitre comporte un résumé de cours enrichi d'exemples et se termine par des exercices corrigés qui en illustrent toutes les notions définies.

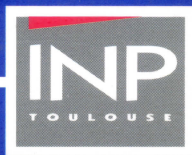
Le niveau mathématique requis est celui d'un premier cycle d'université ou d'une classe préparatoire. Cet ouvrage sera utilisé comme support d'enseignement en écoles d'ingénieurs et dans le cadre des maîtrises de sciences, d'économie et de biologie. Il servira aussi de mise à niveau dans des formations spécialisées.

LES AUTEURS

Bernard LACAZE est professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse.

Corinne MAILHES, Marie MAUBOURGUET et Jean-Yves TOURNERET sont maîtres de conférences à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, en postes à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse (ENSEEIH).

Ce livre s'appuie sur une longue expérience pédagogique de cette équipe dans l'enseignement des probabilités et statistique à l'ENSEEIH.



Institut National Polytechnique de Toulouse

Réf. 457

I.S.B.N. : 2.85428.457.7



9 782854 284577