

**OBJECTIF
LICENCE**

2^e année

ANDRÉ ARNOLD - IRÈNE GUESSARIAN

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Avec 309 exercices corrigés

4^e édition

**75% COURS
+25% EXOS
=100%
EFFICACE**

**Compléments
sur le web**

EdiScience

M 600



36445

②

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Avec 309 exercices corrigés

75 % cours + 25 % exos

André Arnold

Professeur d'informatique à l'université Bordeaux 1

Irène Guessarian

Professeur d'informatique à l'université Paris 6

4^e édition



TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| Introduction | ix |
| 1 Calcul ensembliste et fonctions | 1 |
| 1.1 Calcul ensembliste | 1 |
| 1.1.1 Ensemble, élément, inclusion | 1 |
| 1.1.2 Réunion, intersection, différence, complémentaire, partition | 2 |
| 1.2 Fonctions | 4 |
| 1.2.1 Définitions | 4 |
| 1.2.2 Propriétés | 5 |
| 1.3 Cardinaux | 7 |
| 1.3.1 Ensembles finis | 7 |
| 1.3.2 Ensembles dénombrables | 8 |
| 1.4 Opérations et relations | 9 |
| 1.4.1 Opérations binaires | 9 |
| 1.4.2 Relations | 10 |
| 1.4.3 Opérations ensemblistes sur les relations | 11 |
| 1.4.4 Autres opérations sur les relations | 12 |
| 1.4.5 Quelques propriétés des relations binaires | 13 |
| 1.4.6 Relations d'équivalence | 14 |
| 1.4.7 Congruences | 15 |
| 2 Ensembles ordonnés | 17 |
| 2.1 Relations d'ordre et de préordre | 17 |
| 2.1.1 Ordres larges et ordres stricts | 17 |
| 2.1.2 Ordres totaux et ordres partiels | 18 |
| 2.1.3 Préordres | 18 |
| 2.2 Ensembles ordonnés | 20 |
| 2.2.1 Applications monotones | 20 |
| 2.2.2 Ensembles totalement ordonnés | 20 |
| 2.2.3 Produits d'ensembles ordonnés | 21 |
| 2.2.4 Sous-ensembles ordonnés, chaînes et antichaînes | 21 |
| 2.3 Majorants et minorants | 22 |
| 2.4 Ensembles bien fondés et induction | 24 |
| 2.5 Treillis et points fixes | 26 |
| 2.5.1 Treillis | 26 |
| 2.5.2 Treillis complets et fonctions continues | 30 |
| 2.5.3 Points fixes de fonctions monotones | 32 |

| | | |
|----------|--|----|
| 3 | Récursion et induction | 35 |
| 3.1 | Raisonnement par récurrence sur \mathbb{N} | 36 |
| 3.1.1 | Premier principe d'induction | 36 |
| 3.1.2 | Deuxième principe d'induction | 38 |
| 3.2 | Définitions inductives et preuves par induction structurelle | 40 |
| 3.2.1 | Ensembles définis inductivement | 40 |
| 3.2.2 | Preuves par induction | 43 |
| 3.3 | Termes | 45 |
| 3.3.1 | Définition | 45 |
| 3.3.2 | Interprétations des termes | 45 |
| 3.3.3 | Définitions non ambiguës | 47 |
| 3.3.4 | Fonctions définies inductivement | 47 |
| 3.4 | Opérations de clôture | 51 |
| 4 | Algèbres de Boole | 55 |
| 4.1 | Algèbres de Boole | 55 |
| 4.1.1 | Définition algébrique | 55 |
| 4.1.2 | Homomorphismes | 57 |
| 4.1.3 | L'algèbre de Boole minimale | 58 |
| 4.2 | Anneaux de Boole | 59 |
| 4.2.1 | “ou” exclusif | 59 |
| 4.2.2 | Anneaux de Boole | 60 |
| 4.3 | Fonctions booléennes | 61 |
| 4.3.1 | Forme polynomiale des fonctions booléennes | 62 |
| 4.3.2 | Fonctions duales | 64 |
| 5 | Logique | 67 |
| 5.1 | Remarques sur le raisonnement mathématique | 68 |
| 5.1.1 | Quelques faits utiles à connaître | 68 |
| 5.1.2 | Quelques confusions regrettables à éviter | 69 |
| 5.1.3 | Calcul propositionnel versus calcul des prédicats | 69 |
| 5.2 | Calcul propositionnel | 70 |
| 5.2.1 | Syntaxe : les formules | 70 |
| 5.2.2 | Sémantique : interprétation d'une formule | 71 |
| 5.2.3 | Démonstrations logiques | 73 |
| 5.2.4 | Syntaxe et sémantique | 76 |
| 5.2.5 | Autres connecteurs logiques | 79 |
| 5.2.6 | Systèmes déductifs | 82 |
| 5.3 | Calcul des prédicats du premier ordre | 83 |
| 5.3.1 | Syntaxe : formules du premier ordre | 83 |
| 5.3.2 | Sémantique : interprétation des formules | 86 |
| 5.3.3 | Un formulaire | 91 |
| 5.3.4 | Variants lexicaux | 92 |
| 5.3.5 | Formules prénexes | 93 |
| 5.4 | Théorème de Herbrand et conséquences | 94 |

| | |
|--|------------|
| 5.4.1 Théories et modèles | 94 |
| 5.4.2 Modèles de Herbrand | 97 |
| 5.4.3 Théorème de Herbrand | 98 |
| 5.4.4 Skolemisation | 100 |
| 5.4.5 Clauses de Horn | 101 |
| 6 Algèbre combinatoire et applications | 105 |
| 6.1 Rappels | 105 |
| 6.1.1 Généralités | 105 |
| 6.1.2 Applications | 108 |
| 6.2 Applications : comptage des ensembles finis | 110 |
| 6.2.1 Rappels | 110 |
| 6.2.2 Formules d'exclusion-inclusion et applications | 111 |
| 6.3 Compléments | 114 |
| 7 Suites récurrentes | 117 |
| 7.1 Introduction : exemples, généralités | 118 |
| 7.1.1 Exemples | 118 |
| 7.1.2 Généralités, classification | 121 |
| 7.2 Récurrences linéaires | 124 |
| 7.2.1 Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants | 124 |
| 7.2.2 Récurrences linéaires non homogènes à coefficients constants | 130 |
| 7.2.3 Récurrences linéaires à coefficients variables | 135 |
| 7.3 Autres cas de relations de récurrence | 136 |
| 7.3.1 Récurrences de partition et changement de variable | 136 |
| 7.3.2 Transformation de l'image | 137 |
| 7.3.3 Récurrences complètes | 137 |
| 7.4 Compléments et exemples | 138 |
| 7.4.1 Opérations sur les suites | 138 |
| 7.4.2 Applications : dénombrements, nombres de Stirling | 140 |
| 8 Séries génératrices | 143 |
| 8.1 Généralités | 144 |
| 8.1.1 Intuitions | 144 |
| 8.1.2 Définitions | 146 |
| 8.1.3 Opérations sur les séries | 149 |
| 8.1.4 Séries génératrices exponentielles | 151 |
| 8.1.5 Décomposition en éléments simples | 151 |
| 8.2 Applications des séries génératrices aux suites récurrentes | 155 |
| 8.2.1 Récurrences linéaires à coefficients constants | 155 |
| 8.2.2 Récurrences linéaires non homogènes à coefficients constants | 157 |
| 8.2.3 Partages d'entiers | 158 |
| 8.2.4 Récurrences linéaires d'ordre fini à coefficients variables | 159 |
| 8.2.5 Récurrences complètes | 160 |
| 8.2.6 Analyse en moyenne d'algorithmes | 162 |

| | |
|--|-----|
| 9 Comportements asymptotiques | 163 |
| 9.1 Généralités | 164 |
| 9.1.1 Définitions | 164 |
| 9.1.2 Opérations sur les ordres de grandeur | 165 |
| 9.2 Critères de comportement asymptotique des fonctions | 167 |
| 9.2.1 Une condition suffisante | 167 |
| 9.2.2 Échelles de comparaison | 169 |
| 9.2.3 Développements asymptotiques | 170 |
| 9.2.4 Approximations asymptotiques par des sommes partielles | 171 |
| 9.2.5 “bootstrapping” ou reboutement | 173 |
| | |
| 10 Graphes et arbres | 175 |
| 10.1 Graphes | 175 |
| 10.1.1 Définitions | 175 |
| 10.1.2 Graphes isomorphes | 177 |
| 10.1.3 Graphes simples | 177 |
| 10.1.4 Sous-graphes et graphes partiels | 179 |
| 10.1.5 Degré d’un sommet | 179 |
| 10.1.6 Chemins | 181 |
| 10.1.7 Connexité | 184 |
| 10.1.8 Exemple historique : les sept ponts de Königsberg | 185 |
| 10.1.9 Coloration d’un graphe | 188 |
| 10.1.10 Graphes planaires | 188 |
| 10.2 Arbres et arborescences | 189 |
| 10.2.1 Arbres | 189 |
| 10.2.2 Arborescences | 191 |
| 10.2.3 Arborescences dessinées | 193 |
| | |
| 11 Langages rationnels et automates finis | 195 |
| 11.1 Monoïde libre | 196 |
| 11.2 Langages rationnels | 198 |
| 11.3 Automates finis | 200 |
| 11.3.1 Systèmes de transitions étiquetés | 200 |
| 11.3.2 Complétion d’un automate | 202 |
| 11.3.3 Détermination d’un automate | 203 |
| 11.3.4 Automates minimaux | 205 |
| 11.3.5 Opérations sur les automates | 210 |
| 11.4 Systèmes d’équations | 211 |
| | |
| 12 Probabilités discrètes | 217 |
| 12.1 Généralités | 218 |
| 12.1.1 Problématique et terminologie | 218 |
| 12.1.2 Espace des épreuves | 218 |
| 12.1.3 Événements | 219 |
| 12.1.4 Relations entre événements | 219 |
| 12.2 Espaces de probabilités | 220 |

| | |
|--|-----|
| 12.2.1 Espace probabilisable | 220 |
| 12.2.2 Espace de probabilités | 221 |
| 12.3 Probabilités conditionnelles et événements indépendants | 223 |
| 12.3.1 Intuition | 223 |
| 12.3.2 Définitions | 224 |
| 12.3.3 Formule de Bayes | 226 |
| 12.3.4 Événements indépendants | 227 |
| 12.3.5 Probabilités produits | 230 |
| 12.4 Variables aléatoires | 231 |
| 12.4.1 Définitions | 231 |
| 12.4.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire | 234 |
| 12.4.3 Application aux approximations | 239 |
| 12.5 Fonctions génératrices | 242 |
| 12.6 Lois usuelles | 244 |
| 12.6.1 Loi de Bernoulli | 244 |
| 12.6.2 Loi binomiale | 244 |
| 12.6.3 Loi géométrique | 245 |
| 12.6.4 Loi hypergéométrique | 246 |
| 12.6.5 Loi de Poisson | 247 |
| 12.6.6 Loi uniforme | 248 |
| 13 Chaînes de Markov finies | 249 |
| 13.1 Introduction | 250 |
| 13.2 Généralités | 251 |
| 13.2.1 Définitions | 251 |
| 13.2.2 Exemples | 252 |
| 13.2.3 Matrices de transition | 253 |
| 13.2.4 Propriétés | 254 |
| 13.3 Classification des états | 256 |
| 13.3.1 Chaînes irréductibles | 256 |
| 13.3.2 Classification des états | 257 |
| 13.3.3 Graphe d'une chaîne de Markov finie | 261 |
| 13.3.4 Probabilités et temps moyen d'absorption | 263 |
| 14 Applications et exemples | 267 |
| 14.1 Quicksort | 268 |
| 14.1.1 Quicksort | 268 |
| 14.1.2 Complexité la pire de Quicksort en nombre de comparaisons | 270 |
| 14.1.3 Complexité moyenne de Quicksort en nombre de comparaisons | 270 |
| 14.2 L'algorithme d'Euclide | 274 |
| 14.2.1 L'algorithme d'Euclide | 274 |
| 14.2.2 Complexité de l'algorithme d'Euclide dans le pire cas | 275 |
| 14.2.3 Le calcul des nombres de Fibonacci | 277 |
| 14.3 Preuves de propriétés et de terminaison de programmes | 279 |

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 15 Solutions des exercices | 287 |
| Chapitre 1 | 287 |
| Chapitre 2 | 295 |
| Chapitre 3 | 300 |
| Chapitre 4 | 307 |
| Chapitre 5 | 313 |
| Chapitre 6 | 320 |
| Chapitre 7 | 326 |
| Chapitre 8 | 331 |
| Chapitre 9 | 339 |
| Chapitre 10 | 341 |
| Chapitre 11 | 348 |
| Chapitre 12 | 357 |
| Chapitre 13 | 369 |
| Chapitre 14 | 378 |
| Index | 383 |

ANDRÉ ARNOLD - IRÈNE GUESSARIAN

OBJECTIF
LICENCE

OBJECTIF
BIS/DUT

OBJECTIF
CONCOURS

MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Cours avec 309 exercices corrigés

Les « mathématiques pour l'informatique » rassemblées dans cet ouvrage constituent l'essentiel des connaissances qu'il est indispensable d'acquérir, dans le cadre d'études supérieures en informatique, pour formaliser des concepts, modéliser des situations, manipuler des objets...

Les notions de cours sont illustrées d'un grand nombre d'exemples et de plus de 300 exercices tous corrigés.

Contenu : Calcul ensembliste, fonctions. Ensembles ordonnés. Récursion et induction. Algèbres de Boole. Logique. Algèbre combinatoire. Suites récurrentes. Séries génératrices. Comportements asymptotiques. Graphes et arbres. Langages rationnels et automates finis. Probabilités discrètes. Chaînes de Markov finies.

André Arnold
est professeur d'informatique
à l'université Bordeaux 1.

Irène Guessarian
est professeur d'informatique
à l'université Paris 6.



ISBN 2 10 049230 6

www.ediscience.net

