Mathématiques L3
Analyse

Sous la direction de
Jean-Pierre Marco

Hakim Boumaza
Benjamin Collas
Stéphane Collion
Marie Dellinger
Zoé Faget
Laurent Lazzarini
Florent Schaffhauser

CURSUS LMD

Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés

APPRENDRE, TOUJOURS

PEARSON

Mathématiques L3
Analyse

Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés

Sous la direction de Jean-Pierre Marco

Hakim Boumaza, Benjamin Collas, Stéphane Collion, Marie Dellinger, Zoé Faget, Laurent Lazzarini, Florent Schaffhauser

PEARSON
Education

Table des matières

Les auteurs v

Avant-propos xix

Remerciements xx

Partie I Topologie 1

1 Espaces topologiques 5
- I Topologies, notions ensemblistes associées 5
  - I.1 Définitions et exemples 5
  - I.2 Bases de topologie 8
  - I.3 Un exemple fondamental : la topologie naturelle d'un espace métrique 10
  - I.4 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie 11
  - I.5 Voisinages 14
  - I.6 Parties denses 16
  - I.7 Espaces séparés 17
- II Continuité et limite 17
  - II.1 Continuité globale et locale 17
  - II.2 Opérations sur la continuité 20
  - II.3 Continuité et densité, prolongements des égalités et inégalités 22
  - II.4 Homéomorphismes 22
  - II.5 Limite d'une application en un point 23
- III Construction d'espaces topologiques 24
  - III.1 Espaces produits 25
  - III.2 Espaces quotients 27
- IV Exercices 29

2 Espaces topologiques compacts 31
- I Espaces topologiques compacts 31
  - I.1 Définitions et premières propriétés 31
  - I.2 Les compacts de $\mathbb{R}^n$ 33
- II Compacité et continuité 34
  - II.1 Propriétés des applications continues définies sur un compact 34
  - II.2 Applications : théorèmes classiques d'existence d'extrema 35
- III Espaces localement compacts 36
  - III.1 Compacité locale 36
  - III.2 Compactification d'Alexandroff 37
- IV Exercices 39

3 Espaces topologiques connexes 41
- I Espaces connexes 41
  - I.1 Définitions, premières propriétés et exemples 41
  - I.2 Composantes connexes 44
- II Connexité et continuité 45
- III Connexité par arcs 46
- IV Applications pratiques de la connexité 47
  - IV.1 Résultats d'existence 48

IV.2 Résultats d'unicité 48
V Connexité locale 49
VI Exercices 50

4 Dénombrabilité et suites dans les espaces topologiques **51**
I Rappels de notions ensemblistes 51
I.1 Dénombrabilité 51
I.2 Suites 53
II Suites à valeurs dans un espace topologique 53
II.1 Limites de suites 53
II.2 Suites et espace topologique compact 56
II.3 Convergence simple d'une suite d'applications 56
III Dénombrabilité et espace topologique 57
III.1 Espace topologique à base dénombrable 58
III.2 Espace topologique à base dénombrable de voisinages 59
III.3 Espace séparable 60
IV Suites à valeurs dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages . . 61
V Exercices 63

5 Espaces métriques **65**
I Distances et espaces métriques 65
I.1 Rappels et exemples 65
I.2 Isométries et transport de distances 66
I.3 Espaces vectoriels normés 66
II Topologie d'un espace métrique 67
II.1 Topologie naturelle sur un espace métrique 67
II.2 Diamètre d'une partie, distance entre deux parties 68
III Espaces semi-métriques, espaces vectoriels semi-normés 69
IV Espaces métrisables 71
IV.1 Espaces métrisables 71
IV.2 Propriétés de séparation des espaces métrisables 73
IV.3 Propriétés de dénombrabilité des espaces métrisables 74
V Continuité uniforme dans les espaces métriques 75
VI Limites dans les espaces métriques 77
VI.1 Limites d'applications, limites de suites 77
VI.2 Convergence uniforme d'une suite d'applications 77
VII Compacité dans les espaces métriques 78
VII.1 Suites et espaces métriques compacts 78
VII.2 Espaces métriques précompacts 80
VII.3 Continuité et espaces métriques compacts 81
VIII Exercices 82

6 Espaces complets **83**
I Espaces métriques complets 83
I.1 Oscillation d'une fonction 83
I.2 Suites de Cauchy 84
I.3 Espaces complets 86
I.4 Premières propriétés des espaces complets 88
I.5 Exemples 90
I.6 Espaces semi-métriques complets 91
II Précompacité, complétude et compacité 91
III Applications aux problèmes de convergence 93

III.1 Interversion des limites . . . 93
III.2 Applications uniformément continues . . . 95
IV Approximations successives et point fixe . . . 96
IV.1 Dynamique liée à une application . . . 96
IV.2 Le théorème du point fixe . . . 97
V La propriété de Baire . . . 99
V.1 Définitions et premières propriétés . . . 99
V.2 Le théorème de Baire . . . 101
V.3 Espace maigre, espace résiduel, exemples . . . 101
VI Le complété d'un espace métrique . . . 104
VI.1 Définitions et propriétés . . . 104
VI.2 Existence du complété . . . 105
VII Exercices . . . 106

7 Espaces vectoriels normés **107**
I Espaces vectoriels normés . . . 107
I.1 Rappels et définitions . . . 107
I.2 Exemples . . . 109
I.3 Sous-espaces, produits et quotients . . . 113
I.4 Parties denses et parties totales . . . 114
II Applications linéaires continues . . . 115
II.1 Espaces d'applications linéaires continues . . . 115
II.2 Formes linéaires continues et dual topologique . . . 119
III Espaces d'applications multilinéaires continues . . . 120
IV Espaces normés de dimension finie . . . 121
IV.1 Propriétés générales . . . 121
IV.2 Le théorème de Riesz . . . 123
V Exercices . . . 124

8 Exemples d'espaces topologiques **125**
I Propriétés topologiques des groupes classiques . . . 125
I.1 Fonctions polynômes . . . 125
I.2 Polynômes et matrices . . . 126
II Propriétés topologiques des groupes classiques . . . 127
III Groupes topologiques . . . 127
III.1 Définitions et premières propriétés . . . 127
III.2 Sous-groupes d'un groupe topologique . . . 129
IV Groupes opérant sur des espaces topologiques . . . 129
IV.1 Définitions et premières propriétés . . . 129
IV.2 Connexité et groupes classiques . . . 131
V Les tores . . . 133
VI L'espace projectif réel . . . 134
VII La structure des ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . 135

9 Espaces de fonctions continues **137**
I Espaces de fonctions continues . . . 137
I.1 Espaces de fonctions continues . . . 137
I.2 Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn . . . 138
II Le théorème de Stone-Weierstrass . . . 141
III Le théorème d'Ascoli . . . 145
III.1 La notion d'équicontinuité . . . 145
III.2 Le théorème d'Ascoli . . . 146

IV Exercices 148

Partie II Intégration et théorie de la mesure **151**

10 L'intégrale de Riemann **153**
I Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier 153
I.1 Fonctions en escalier 154
I.2 Intégrale d'une fonction en escalier 154
II Intégrale de Riemann d'une fonction réglée 156
II.1 Fonctions réglées 157
II.2 Intégrale d'une fonction réglée 158
III L'intégrale de Riemann 159
III.1 Fonctions Riemann-intégrables 160
III.2 Intégrale d'une fonction Riemann-intégrable 162
IV Sommes de Riemann 163
V Intégrales de Riemann généralisées 168
V.1 Intégrale d'une fonction $f : [a.b[\to E$ 168
V.2 Quelques difficultés de la théorie de Riemann 169
VI Exercices 170
Complément 1 L'intégrale de Henstock-Kurzweil 172

11 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ **179**
I Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$ 179
I.1 Pavés et cubes 180
I.2 Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$ 181
I.3 Propriétés de la mesure extérieure 183
II Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ 185
II.1 Ensembles mesurables 185
II.2 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ 187
III Sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$ 193
III.1 Ensembles de mesure nulle 193
III.2 Quelques sous-ensembles remarquables 196
III.3 Le théorème de Lebesgue 200
IV Exercices 204

12 Théorie géométrique de la mesure **205**
I Espaces mesurables 205
I.1 Tribus sur une ensemble 205
I.2 Algèbres et classes monotones 207
I.3 Applications mesurables 208
I.4 Tribus produit 210
I.5 Fonctions numériques mesurables 212
II Espaces mesurés 217
II.1 Mesures 217
II.2 Ensembles négligeables. Espaces mesurés complets 219
III Construction de mesures 221
III.1 Mesures extérieures 222
III.2 Prémesures. Théorème de prolongement 225
III.3 Mesures boréliennes 226
III.4 Un théorème général d'unicité 230
IV Exercices 232

13 L'intégrale de Lebesgue **233**

I L'intégrale sur un espace mesuré 233

I.1 Fonctions étagées mesurables 234

I.2 Fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$ 237

I.3 Fonctions Lebesgue-intégrables 243

II Intégration des fonctions définies sur un espace produit 253

II.1 Mesure produit et sommation par tranches 253

II.2 Le théorème de Fubini 257

III Exercices 261

14 Calcul intégral **263**

I L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ 263

I.1 L'espace de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ 263

I.2 Résultats de comparaison des intégrales de Lebesgue et de Riemann 265

I.3 Intégrale d'une fonction Lebesgue-intégrable admettant une primitive 267

I.4 Intégrales des fonctions de plusieurs variables réelles 268

I.5 Une formule de changement de variables 269

II Interversion de limites et d'intégrales 275

II.1 Régularité sous le signe $\int$ 275

II.2 Interversion de $\sum$ et $\int$ 279

III Exercices 283

15 Les espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p **285**

I Espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p pour $1 \leqslant p < \infty$ 285

I.1 Les espaces semi-normés $\mathscr{L}^p$ 285

I.2 Inégalités de convexité 287

I.3 Les espaces normés L^p 289

II Complétude des espaces L^p 290

III Les espaces $\mathscr{L}^\infty$ et L^∞ 292

IV Parties denses dans les espaces L^p 294

V Un premier résultat de dualité 296

VI Le produit de convolution 298

VI.1 Cas des fonctions positives 298

VI.2 Cas des fonctions de L^p 300

VI.3 Dérivabilité 301

VI.4 Approximation de l'unité 301

VII Exercices 303

Partie III Applications linéaires en dimension infinie **305**

16 Le théorème de Hahn-Banach **307**

I Le théorème de Hahn-Banach 307

II Prolongement des formes linéaires définies sur un espace semi-normé 308

III Quelques conséquences géométriques du théorème de Hahn-Banach dans les espaces vectoriels normés 310

IV Le dual topologique d'un sous-espace fermé et d'un espace quotient 311

V Exercices 312

17 Théorème de Baire et applications linéaires **313**
I Le théorème de Banach-Steinhaus 313
II Le théorème de l'application ouverte 315
III Le théorème du graphe fermé 317
IV Exercices 319

18 Espaces de Hilbert **321**
I Produits scalaires et espaces de Hilbert 322
II Projection orthogonale 326
III Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet 330
IV Bases hilbertiennes 331
V Isomorphismes d'espaces de Hilbert 336
VI Sommes hilbertiennes 338
VII Produit tensoriel de deux espaces de Hilbert 341
VIII Exercices 343

19 Opérateurs bornés **345**
I L'espace des opérateurs bornés 345
II Adjoint d'un opérateur borné 347
III Opérateurs positifs 350
IV Opérateurs compacts 355
IV.1 Généralités 355
IV.2 L'alternative de Fredholm 358
V Exercices 361

20 Spectre des opérateurs bornés **363**
I Spectre, résolvante et rayon spectral 363
II Spectre des opérateurs compacts 368
II.1 Spectre des opérateurs compacts 368
II.2 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints 370
II.3 Calcul fonctionnel des opérateurs compacts auto-adjoints 373
II.4 Réduction des opérateurs compacts auto-adjoints 374
III Le théorème spectral pour les opérateurs bornés 375
IV Exemples de calculs de spectres 379
IV.1 Le spectre des opérateurs auto-adjoints positifs 379
IV.2 Le laplacien discret en dimension un 380
IV.3 Un exemple d'opérateur non borné 381
V Exercices 382

Partie IV Fonctions d'une variable complexe **385**

21 Les fonctions analytiques **391**
I Rappels et compléments sur les séries entières 391
I.1 Polynômes et séries formelles 391
I.2 Rappels sur les séries entières 393
I.3 Opérations sur les séries formelles 396
II Les fonctions analytiques 400
II.1 Définitions et premiers exemples 401
II.2 Propriétés élémentaires des fonctions analytiques 402
III Exemples fondamentaux : exponentielle et logarithme 404
III.1 La fonction exponentielle complexe 404

III.2 Argument et logarithme complexe . . . 407
IV Exercices . . . 412

22 Fonctions holomorphes et théorie de Cauchy **415**
I La notion d'holomorphie . . . 415
I.1 Fonctions holomorphes . . . 416
I.2 Conditions de Cauchy-Riemann . . . 417
II Intégration le long des chemins de $\mathbb{C}$ . . . 419
II.1 Chemins de $\mathbb{C}$ . . . 419
II.2 Intégration complexe le long de chemins . . . 421
II.3 De l'intégrale sur les chemins à l'existence de primitives . . . 424
III Les théorèmes de Cauchy . . . 426
III.1 Le théorème de Cauchy pour le bord d'un triangle . . . 427
III.2 Existence de primitives sur les ouverts convexes . . . 429
IV Indice et théorème de Cauchy . . . 430
IV.1 Indice d'un chemin fermé . . . 430
IV.2 Formule de Cauchy . . . 432
IV.3 Analyticité des fonctions holomorphes . . . 432
V Exercices . . . 434

23 Les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes **437**
I Le théorème d'identité . . . 437
II Les inégalités de Cauchy et leurs applications . . . 440
II.1 Propriété de la moyenne et principe du maximum . . . 442
II.2 Comportement local . . . 444
III Exercices . . . 447

24 Théorie de Cauchy homotopique **449**
I Intégration sur chemins continus . . . 449
I.1 Intégrales . . . 449
I.2 Homotopie de chemins . . . 451
II Théorie de Cauchy homotopique . . . 453
II.1 Indice et détermination continue de l'argument . . . 453
II.2 Théorème de Cauchy homotopique . . . 455
III Simple connexité . . . 457
IV Exercices . . . 459

25 Singularités des fonctions holomorphes - Théorème des résidus **461**
I Classification des singularités isolées . . . 461
I.1 Singularités de fonctions holomorphes . . . 461
I.2 Séries de Laurent . . . 464
I.3 Développement de Laurent d'une fonction holomorphe . . . 467
II Primitives et résidus . . . 468
II.1 Résidu d'une fonction . . . 468
II.2 Indice et nombre de zéros et de pôles . . . 470
II.3 Calculs d'intégrales . . . 474
III Fonctions méromorphes . . . 478
IV Quelques mots sur la sphère de Riemann . . . 480
IV.1 Fonctions méromorphes sur $\widehat{\mathbb{C}}$ . . . 481
IV.2 Résidu à l'infini . . . 483
V Exercices . . . 485

26 Espaces de fonctions holomorphes et méromorphes **489**
I Problèmes de convergence . . . 489
I.1 Suites de fonctions holomorphes . . . 489
I.2 Topologie de la convergence compacte . . . 492
I.3 Compacité . . . 496
II Séries de fonctions holomorphes et méromorphes . . . 498
II.1 Séries de fonctions holomorphes . . . 498
II.2 Séries de fonctions méromorphes . . . 499
III Produits infinis de fonctions . . . 501
III.1 Produits infinis de nombres complexes . . . 501
III.2 Produits infinis de fonctions . . . 503
IV Interpolation de fonctions holomorphes et méromorphes . . . 505
IV.1 Le théorème d'interpolation de Mittag-Leffler . . . 506
IV.2 Le théorème d'interpolation de Weierstrass . . . 508
IV.3 Conséquences algébriques . . . 511
V Exercices . . . 514

Partie V Analyse de Fourier **517**

27 Analyse fonctionnelle sur le tore **529**
I Espaces de fonctions périodiques . . . 529
I.1 Deux réductions utiles . . . 529
I.2 La droite réelle $\mathbb{R}$, le tore $\mathbb{T}$ et le groupe unitaire $\mathbb{U}$ . . . 530
I.3 Fonctions périodiques et opérateurs de translation . . . 532
I.4 Fonctions périodiques continues . . . 533
I.5 Les espaces $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}(\mathbb{T})$, $1 \leqslant \mathrm{k} < +\infty$ . . . 535
I.6 Fonctions périodiques boréliennes . . . 537
I.7 Mesure de Haar sur le tore . . . 538
I.8 Les espaces $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{T})$, pour $1 \leqslant \mathrm{p} \leqslant +\infty$ . . . 542
I.9 Espaces de Banach homogènes sur le tore . . . 547
II Produits de convolution . . . 548
II.1 Construction du produit de convolution . . . 550
II.2 Propriétés analytiques . . . 558
II.3 Propriétés algébriques . . . 559
III Premières applications . . . 560
III.1 Coefficients de Fourier . . . 560
III.2 Fonctions de corrélation . . . 562
III.3 Approximations de l'unité . . . 565
III.4 Fonctions harmoniques . . . 575
IV Exercices . . . 585
Complément 1 Groupes et convolution . . . 587
Complément 2 Interpolation entre espaces L^{p} . . . 590

28 Analyse et synthèse spectrales sur le tore **595**
I Analyse spectrale . . . 597
I.1 Continuité . . . 597
I.2 Coefficients de Fourier et symétries . . . 598
I.3 Coefficients de Fourier et dérivation . . . 601
I.4 Comportements asymptotiques . . . 603
I.5 Séries de Fourier et équations différentielles . . . 605
II Convergence en norme . . . 607

II.1 Deux critères simples de convergence 607
II.2 Non-convergence dans $L^1(\mathbb{T})$ 609
II.3 Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$ 610
II.4 Convergence dans $L^p(\mathbb{T})$, pour $1 < p < +\infty$ 611
II.5 Non-convergence dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ 612
III Synthèses spectrales 613
III.1 L'espace $A(\mathbb{T}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ des séries absolument convergentes 614
III.2 L'isométrie $L^2(\mathbb{T}) = \ell_2(\mathbb{Z})$ 616
III.3 Les espaces $A_p(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$, pour $2 \leqslant p \leqslant +\infty$ 617
III.4 Convergence dans $\mathscr{C}^k(\mathbb{T})$, $0 \leqslant k < +\infty$ 620
III.5 Convergence dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T})$ 621
IV Convergence ponctuelle 621
IV.1 Convergence en moyenne de Cesarò 622
IV.2 Le théorème de Dirichlet et ses satellites 623
IV.3 Non-convergence en un point, convergence presque partout 624
V Une série trigonométrique est-elle une série de Fourier ? 625
V.1 Une condition nécessaire 625
V.2 Une condition suffisante 626
VI Exercices 629

29 Analyse de Fourier sur la droite réelle **633**
I Rappels et compléments sur la droite numérique réelle 633
I.1 Quelques espaces fonctionnels utiles 633
I.2 Espaces de Banach homogènes et convolution 635
I.3 Approximations de l'unité 639
I.4 L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 640
I.5 Caractères boréliens bornés sur $\mathbb{R}$ 641
II Analyse de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ 642
II.1 L'intégrale de Fourier 642
II.2 Continuité 643
II.3 Premiers exemples 644
II.4 Transformation de Fourier et symétries 649
III La classe des fonctions à décroissance rapide 651
III.1 Propriétés topologiques 651
III.2 Des séries aux intégrales de Fourier 656
III.3 Analyse de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 657
IV La synthèse spectrale dans $L^1(\mathbb{R})$ 659
IV.1 Deux résultats de dualité 659
IV.2 Injectivité de la transformation de Fourier 660
IV.3 Inversion dans l'algèbre $A(\mathbb{R})$ de Wiener 661
IV.4 Convergence ponctuelle 663
V Analyse de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ 664
V.1 Le théorème de Plancherel 664
V.2 Exemples 667
VI Exercices 668

Partie VI Calcul différentiel **671**

30 La différentielle **677**
I Définitions et premières propriétés 677
I.1 Définition 677

I.2 Premières propriétés 679
I.3 Application différentielle 679
II Quelques exemples et théorèmes classiques 679
II.1 Exemples 680
II.2 Opérations sur les fonctions différentiables 681
III Différentielles et dérivées partielles 683
IV Matrice jacobienne 684
V Exercices 684

31 Le théorème des accroissements finis **687**
I Théorème des accroissements finis 687
I.1 Théorème des accroissements finis, cas réel 687
I.2 Théorème des accroissements finis, cas général 687
I.3 Une forme forte du théorème des accroissements finis 689
II Applications du théorème des accroissements finis 689
II.1 Fonctions à dérivées nulles 689
II.2 Différentielles partielles et différentiabilité 690
II.3 Gâteaux-différentiabilité 691
II.4 Un théorème de convergence 691
III Exercices 692

32 Les différentielles d'ordre supérieur **695**
I Dérivées successives et différentielles successives 695
II Premiers exemples et résultats classiques 696
III Théorème de Schwarz 698
III.1 Différentielle seconde 698
III.2 Cas particulier : $\mathsf{E} = \mathsf{E}_1 \times \ldots \times \mathsf{E}_k$ 699
IV Matrice hessienne 701
V Formules de Taylor 702
V.1 Préliminaires 702
V.2 Énoncé des formules 703
V.3 Unicité de la formule de Taylor 704
VI Exercices 704

33 Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites et du rang **707**
I Difféomorphisme 707
II Théorème d'inversion locale 709
II.1 Énoncé et exemples 709
II.2 Preuve du théorème d'inversion locale 710
II.3 Applications du théorème d'inversion locale 714
III Théorème des fonctions implicites 715
IV Théorème du rang constant 719
IV.1 Rang, submersion, immersion, plongement 719
IV.2 Théorème du rang constant 725
V Exercices 727

34 Problèmes d'extrema **729**
I Extrema libres 729
I.1 Définitions générales sur les extrema 729
I.2 Préliminaires sur les formes bilinéaires continues 730
I.3 Conditions nécessaires à l'existence d'un extremum 731
I.4 Condition suffisante à l'existence d'un extremum 734

II Extrema liés 734
II.1 Énoncé du théorème des multiplicateurs de Lagrange et exemples 735
II.2 Preuve du théorème des multiplicateurs de Lagrange 737
III Exercices 739

35 La notion de sous-variété **741**
I Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 741
I.1 Une première définition des sous-variétés 741
I.2 Niveaux de fonctions et sous-variétés 744
I.3 Images de fonctions et sous-variétés 747
II L'espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ 748
III Exercices 752

Partie VII Équations différentielles **755**

36 Les solutions d'une équation différentielle **761**
I Équations différentielles et solutions 761
I.1 Équations différentielles et solutions 761
I.2 Équations autonomes et non autonomes 762
I.3 Solutions maximales, points d'existence, points d'unicité 766
I.4 Ensembles α et ω limites, bouts d'une solution 768
I.5 Vers des équations plus générales 769
II Les théorèmes d'existence et d'unicité 770
II.1 Les théorèmes 770
II.2 Premières applications 776
III Exercices 778

37 Exemples explicites et études qualitatives **779**
I Équations linéaires autonomes et exponentielle 779
II Les équations à variables séparées 781
III Intégrabilité 782
III.1 Intégrales premières et conséquences 783
III.2 Le système de Lotka-Volterra 786
IV Quelques inéquations différentielles et intégrales 787
IV.1 Inéquations intégrales 787
IV.2 Application : comparaison des solutions d'une équation différentielle . . . 789
V Équations non autonomes sur la droite 790
VI Introduction à l'étude qualitative des champs plans 792
VI.1 Esquisse d'une méthode d'étude 792
VI.2 Le système de Van der Pol 796
VII Exercices 798

38 Le flot d'un champ de vecteurs **799**
I Le flot : définitions et exemples 799
I.1 Première approche de la notion de flot : le cas autonome 799
I.2 Le cas non autonome 801
I.3 Les changements de variables et le flot 803
II Le flot des équations linéaires 805
II.1 Retour sur la résolution d'une équation linéaire 805
II.2 Flot et résolvante 806
II.3 Dépendance du flot relative aux paramètres 808

II.4 Retour sur l'exponentielle 809

III Propriétés de régularité 810

III.1 Topologie du domaine et continuité du flot 810

III.2 La régularité du flot 811

IV Exercices 814

39 Étude locale d'un champ de vecteurs **815**

I Le théorème de redressement du flot 816

II Quelques questions de stabilité 820

III Le théorème de conjugaison de Grobman-Hartman 820

III.1 Endomorphismes hyperboliques 821

III.2 Un théorème de point fixe hyperbolique 823

III.3 Le théorème de conjugaison pour les difféomorphismes 825

III.4 Le théorème de conjugaison pour les champs 827

IV Le théorème de la variété invariante 831

V Le système de Van der Pol 833

VI Exercices . . . .

Partie VIII Solutions des tests **835**

Partie IX Solutions des exercices **859**

Index **927**