

Jean-Pierre DELMAS

INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

presque sûrement qu'un nombre fini de tirages avant que M_k soit dans A .

Puisque la variable aléatoire X est définie de la façon suivante :

$$X = \begin{cases} V_1 & \text{si } M_1 \in A \\ V_2 & \text{si } M_1 \notin A \text{ et } M_2 \in A \\ \dots & \dots \\ V_n & \text{si } M_1 \notin A, \dots, M_{n-1} \notin A \text{ et } M_n \in A \end{cases}$$

et puisque les événements $B_n \triangleq [\bigcap_{k=1}^{n-1} (M_k \notin A)] \cap (M_n \in A)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) forment une partition de $\Omega - \bigcap_{k=1}^{+\infty} (M_k \notin A)$ de probabilité unité, nous avons :

$$P(X < x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P[(X < x) \cap (B_n)] = \sum_{n=1}^{+\infty} P[(V_n < x) \cap (B_n)].$$

En explicitant B_n et en utilisant l'indépendance des vecteurs aléatoires M_n , on obtient :

$$P(X < x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\prod_{k=1}^{n-1} P(M_k \notin A) \right] P[(V_n < x) \cap (M_n \in A)]$$

et puisque

$$P[(V_n < x) \cap (M_n \in A)] = \frac{1}{c(b-a)} \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

probabilité que le point M distribué au hasard dans le rectangle $[a, b] \times [0, 1]$ appartienne au domaine $\{(v_n < x) \cap (M_n \in A)\}$.

$$P(X < x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - P(M_k \notin A))^{n-1} P[(V_n < x) \cap (M_n \in A)]$$

ce qui est bien la fonction de répartition de la variable aléatoire que l'on désirait générer.

La méthode précédente peut se généraliser à une variable aléatoire X continue de densité de probabilité $f_X(x)$ à support quelconque si l'on peut trouver une densité de probabilité $f_Y(x)$ d'une variable aléatoire Y facile à générer telle que $f_X(x) \leq c f_Y(x)$, à l'aide de l'algorithme suivant :

On génère une variable Y_k de densité de probabilité $f_Y(x)$ et une variable aléatoire U_k d'uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de Y_k .

ellipses

$$V_k = c U_k f_Y(Y_k)$$

M 586/21

19895

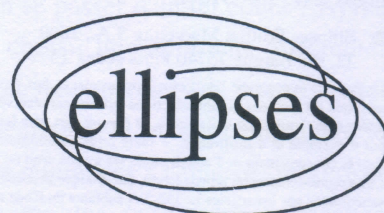
$\frac{2}{5}$

Introduction aux probabilités

Application aux télécommunications
avec exercices et problèmes
commentés



Jean-Pierre DELMAS



I. EXPERIENCE ALEATOIRE, ESPACE PROBABILISE, THEOREMES GENERAUX	11
I.1 Introduction, relation probabilités-statistiques	11
I.2 Définition élémentaire d'une probabilité.....	12
I.3 Application probabilité.....	13
I.31 Définition d'une tribu d'événements.....	13
I.32 Limite d'une suite d'événements.....	15
I.33 Tribu engendrée par une famille de parties de Ω	16
I.34 Définition de l'application probabilité.....	17
I.35 Exemples d'espaces probabilisés	18
I.36 Exemples d'expériences aléatoires.....	20
I.4 Probabilité conditionnelle.....	22
I.41 Définition.....	22
I.42 Propriétés.....	23
I.5 Indépendance	25
I.51 Indépendance de deux événements.....	25
I.52 Indépendance d'une famille finie ou infinie d'événements.....	26
I.53 Indépendance d'une famille de tribus.....	27
I.54 Indépendance d'une famille d'expériences aléatoires	27
I.6 Lemmes de Borel-Cantelli	30
I.61 Lemmes de Borel-Cantelli	30
I.62 Exemples.....	31
Enoncés d'exercices.....	32
I.1] Formule de Bayes séquentielle.....	32
I.2] Formule de Poincaré.....	32
I.3] Espace probabilisé, formule des probabilités totales.....	32
I.4] Axiome de σ additivité.....	33
I.5] Formule de Bayes, probabilités des causes.....	33
I.6] Introduction à la détection, formule de Bayes.....	34
II. VARIABLES ALEATOIRES REELLES SCALAIRES OU MULTIDIMENSIONNELLES.....	35
II.1 Définition d'une variable aléatoire, loi image et loi marginale	35
II.11 Définition d'une variable aléatoire.....	36
II.12 Loi image.....	37
II.13 Tribu engendrée par une variable aléatoire scalaire ou multidimensionnelle..	38
II.14 Loi marginale.....	39
II.2 Variable aléatoire discrète.....	40
II.21 Définition.....	40
II.22 Exemples de variables aléatoires discrètes.....	40
II.3 Fonction de répartition, densité de probabilité	43

II.31	Définition de la fonction de répartition	43
II.32	Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire scalaire	44
II.33	Décomposition d'une fonction de répartition.....	45
II.34	Cas d'une variable aléatoire multidimensionnelle.....	47
II.4	Indépendance de variables aléatoires	52
II.41	Définition.....	52
II.42	Propriétés caractéristiques et applications	54
II.5	Changement de variables	55
II.51	Position du problème.....	55
II.52	Cas bijectif absolument continu	57
II.53	Cas général	58
II.54	Somme de deux variables aléatoires.....	60
	Enoncés d'exercices.....	64
II.1]	Loi hypergéométrique	64
II.2]	Loi géométrique, loi sans mémoire	64
II.3]	Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson	64
II.4]	Introduction au processus de Poisson homogène	65
II.5]	Trafic, formule d'Erlang avec perte et avec attente	66
II.6]	Changement de variables non bijectif.....	68
II.7]	Changement de variables bijectif.....	69
II.8]	Changement de variables aléatoires mixtes	69
II.9]	Changement de variables avec vecteur aléatoire mixte	70
III.	ESPERANCE MATHÉMATIQUE	71
III.1	Espérance mathématique.....	71
III.11	Introduction à la notion d'espérance mathématique.....	71
III.12	Interprétation de l'espérance mathématique comme intégrale.....	72
III.13	Théorème de transfert	75
III.14	Espérance mathématique des variables aléatoires marginales.....	78
III.15	Paramètres de localisation et de dispersion d'une v.a. scalaire	79
III.16	Espérance mathématique et matrice de covariance d'une v.a. $\in \mathbb{R}^n$	84
III.17	Droites de régression	88
III.18	Indépendance et espérance mathématique	91
III.19	Indépendance et non corrélation	91
III.2	Fonction caractéristique et applications.....	93
III.21	Définition.....	93
III.22	Fonction caractéristique, moments et cumulants.....	95
III.23	Fonction caractéristique et somme de variables aléatoires indépendantes	98
	Enoncés d'exercices.....	99
III.1]	Loi de probabilité Log normale.....	99
III.2]	Théorème du transfert, optimisation.....	99
III.3]	Inégalités de Markov, Tchebychev, Chernoff,; application.....	100
III.4]	Droite de régression orthogonale, analyse en composantes principales.....	100
III.5]	Codage détecteur d'erreur par répétition	100
III.6]	D'un phénomène physique aléatoire à une loi déterministe.....	101
III.7]	A propos du mythe des martingales.....	102

III.8] Optimisation d'une escroquerie au casino.....	102
IV. ETUDE DE LA LOI GAUSSIENNE.....	103
IV.1 Variable aléatoire gaussienne scalaire réelle.....	104
IV.11 Définition.....	104
IV.12 Propriétés.....	105
IV.2 Variable aléatoire gaussienne multidimensionnelle réelle.....	106
IV.21 Définition.....	106
IV.22 Fonction caractéristique.....	106
IV.23 Vecteur aléatoire gaussien; / lois marginales gaussiennes.....	108
IV.24 Non corrélation et indépendance dans les vecteurs aléatoires gaussiens....	109
IV.25 Indépendance deux à deux / indépendance dans leur ensemble.....	111
IV.26 Densité de probabilité d'un vecteur aléatoire gaussien non dégénéré.....	111
IV.27 Densité de probabilité d'un vecteur aléatoire gaussien dégénéré.....	114
IV.3 Vecteur aléatoire gaussien complexe.....	116
IV.31 Variable aléatoire scalaire ou multidimensionnelle complexe.....	116
IV.32 Vecteur aléatoire gaussien complexe.....	119
Enoncés d'exercices.....	121
IV.1] Probabilité d'erreur, bruit additif gaussien.....	121
IV.2] Fonction caractéristique et vecteur gaussien.....	122
IV.3] Vecteur gaussien, contre-exemple.....	122
IV.4] Vecteur gaussien, contre-exemple.....	122
IV.5] Loi de Student et loi de Khi-deux à n degrés de liberté.....	122
IV.6] Moyenne et variance empiriques.....	123
V. CONVERGENCES D'UNE SUITE DE VARIABLES ALEATOIRES.....	125
V.1 Analyse d'un exemple.....	125
V.11 Convergences en moyenne.....	126
V.12 Convergence en probabilité, interprétation graphique.....	127
V.13 Convergence presque sûre, interprétation graphique.....	127
V.14 Loi des grands nombres.....	128
V.15 Convergence en loi.....	129
V.2 Différents modes de convergence.....	131
V.21 Convergences en moyenne.....	131
V.22 Convergence en probabilité.....	132
V.23 Convergence presque sûre.....	132
V.24 Convergence en loi.....	133
V.25 Implications entre les divers modes de convergence.....	136
V.3 Lois des grands nombres.....	137
V.31 Loi faible des grands nombres.....	137
V.32 Loi forte des grands nombres.....	138
V.4 Théorème central limite et exemples.....	139
V.41 Théorème central limite.....	139
V.42 Exemple.....	140
V.5 Approximations de lois de probabilité.....	141
V.51 Application du théorème central limite.....	141

V.52	Approximation de la loi Binomiale par la loi normale.....	142
V.53	Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson.....	143
V.54	Approximation de la loi de Poisson par la loi normale.....	144
V.6	Applications aux statistiques.....	144
V.61	Estimation de la moyenne et de la variance.....	144
V.62	Théorème fondamental de la statistique.....	145
	Enoncés d'exercices.....	146
V.1]	Convergence en loi.....	146
V.2]	Convergence en loi, approximation de loi de probabilité.....	146
V.3]	Théorème central limite.....	146
V.4]	Loi forte des grands nombres.....	146
V.5]	Théorème central limite, promenade aléatoire.....	147
V.6]	Interprétation de l'entropie d'une source discrète sans mémoire.....	147
VI.	ESPERANCE CONDITIONNELLE ET LOI CONDITIONNELLE.....	149
VI.1	Approximation linéaire au sens du minimum de l'erreur quadratique moyenne	150
VI.11	Approximation par une constante.....	150
VI.12	Approximations linéaire et affine.....	150
VI.2	Introduction à l'espérance conditionnelle.....	154
VI.22	Meilleure approximation en moyenne quadratique.....	154
VI.23	Interprétation de la loi conditionnelle.....	158
VI.24	Interprétation de l'espérance conditionnelle.....	159
VI.25	Espérance conditionnelle comme projection orthogonale.....	160
VI.26	Variance conditionnelle.....	162
VI.27	Extension de la notion d'espérance conditionnelle.....	163
VI.28	Fonction caractéristique conditionnelle.....	164
VI.29	Généralisation du conditionnement.....	166
VI.3	Définition théorique de l'espérance conditionnelle.....	170
VI.31	Espérance conditionnelle par rapport à une tribu dans L^2	170
VI.32	Espérance conditionnelle par rapport à une tribu dans L^1	173
VI.33	Loi de probabilité conditionnelle.....	175
VI.4	Cas particulier gaussien.....	176
VI.41	Cas général.....	176
VI.42	Cas particulier bidimensionnel.....	178
	Enoncés d'exercices.....	180
VI.1]	Estimation selon le critère du maximum a posteriori.....	180
VI.2]	Espérance conditionnelle et indépendance.....	180
VI.3]	Quelques propriétés des suites de Markov.....	181
IV.4]	Génération d'une suite de Markov.....	182
VI.5]	Introduction aux suites de Markov cachées.....	182
VI.6]	Suite de Markov, suite de Gauss-Markov.....	183
VI.7]	Probabilité d'erreur sur canal de Rayleigh non dispersif.....	184
VII.	SIMULATION SUR ORDINATEUR DE PHENOMENES ALEATOIRES.....	185
VII.1	Génération de variables aléatoires de loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$... 185	
VII.11	Généralités.....	185

VII.12 Méthodes congruentielles.....	187
VII.13 Méthode de registres à décalage rebouclés.....	187
VII.2 Génération de variables aléatoires de loi de probabilité quelconque.....	188
VII.21 Génération par loi inverse.....	189
VII.22 Génération par changement de variables.....	192
VII.23 Génération par convergence en loi.....	193
VII.24 Génération par rejet.....	193
VII.3 Méthode de Monte Carlo.....	195
VII.31 Calcul d'intégrale.....	195
VII.32 Accélération de calcul par réduction de variance.....	196
VII.33 Accélération par échantillonnage pondéré.....	197
Enoncé d'exercice.....	198
VII.1] Génération d'un couple de v.a. gaussiennes indépendantes.....	198
VIII. INTRODUCTION AUX STATISTIQUES.....	199
VIII.1 Modélisation et identification d'un modèle probabiliste.....	199
VIII.11 Modélisation.....	199
VIII.12 Identification d'un modèle probabiliste.....	201
VIII.13 Structure statistique.....	202
VIII.2 Estimation paramétrique.....	203
VIII.21 Echantillonnage.....	203
VIII.22 Propriétés des estimateurs.....	204
VIII.23 Estimateur du maximum de vraisemblance.....	208
VIII.24 Estimation par intervalle de confiance.....	209
VIII.3 Tests d'hypothèses.....	215
VIII.31 Test de χ^2 d'adéquation de loi.....	216
VIII.32 Test d'indépendance.....	220
Enoncé d'exercice.....	222
VIII.1] Construction d'estimateurs ponctuels.....	222
ANNEXE : ELEMENTS DE THEORIE DE LA MESURE.....	223
A.1 Espace mesurable.....	223
A.11 Espace mesurable simple.....	224
A.111 Tribu et clan de parties d'un ensemble.....	224
A.112 Tribu engendrée et tribu induite par une application.....	225
A.113 Tribu engendrée par une famille de parties.....	226
A.12 Espace mesurable produit.....	228
A.2 Application mesurable.....	230
A.21 Définition et caractérisation.....	230
A.22 Propriétés.....	231
A.221 Composition d'applications mesurables.....	231
A.222 Application mesurable dans un espace produit.....	232
A.223 Opérations sur les fonctions mesurables.....	232
A.224 Fonctions étagées et fonction mesurable.....	232
A.225 Limite d'une suite de fonctions mesurables.....	234
A.3 Mesure positive.....	234
A.31 Mesure simple.....	234
A.311 Définition.....	234