



l'intégrale

Série E. Ramis

Claude Deschamps

André Warusfel

François Moulin • Jean François Ruaud
Anne Miquel • Jean-Claude Sifre

Mathématiques

TOUT-EN-UN • 1^{re} année

Cours et exercices corrigés

**NOUVEAU
PROGRAMME**

**MPSI
PCSI**

2^e édition

DUNOD

M 576



Mathématiques

TOUT-EN-UN • I^{re} année



Cours et exercices corrigés

MPSI - PCSI

28558

Sous la direction de

Claude Deschamps et **André Warusfel**

François Moulin

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm
Professeur de Mathématiques Spéciales MP*
au lycée privé Sainte-Geneviève*

Jean François Ruaud

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm
Professeur de Mathématiques Spéciales MP
au lycée Saint-Louis*

Anne Miquel

*Ancienne élève de l'École polytechnique
Professeur de Mathématiques Supérieures MPSI
au lycée Louis-le-Grand*

Jean-Claude Sifre

*Ancien élève de l'École polytechnique
Professeur de Mathématiques Spéciales PC*
au lycée Louis-le-Grand*

2^e édition

Nouveau tirage corrigé

DUNOD

Table des matières

0	Vocabulaire et notations	1
1.	Ensembles usuels de nombres	1
1.1	Notations	1
1.2	Relations d'ordre	2
1.3	Intervalles	3
2.	Vocabulaire relatif aux ensembles et aux applications	3
2.1	Propositions mathématiques	3
2.2	Ensembles	4
2.3	Applications	4
3.	Entiers, dénombrement	6
3.1	Entiers naturels, récurrence	6
3.2	Ensembles finis, dénombrement	7
4.	Structures algébriques usuelles	7
4.1	Lois de composition interne sur un ensemble E	8
4.2	Groupes	8
4.3	Anneaux et corps	10
4.4	Espaces vectoriels	11
I	Pour commencer...	17
1	Les nombres complexes	19
1.	Le corps des nombres complexes	19
1.1	Définition	19
1.2	Conjugué d'un nombre complexe	21
1.3	Module d'un nombre complexe	22
1.4	Arguments d'un complexe non nul, forme trigonométrique	24
1.5	Exponentielle complexe	29
2.	Applications à la trigonométrie	31
2.1	Linéarisation de $\cos^m \theta \sin^n \theta$	32
2.2	Expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$	32
2.3	Expression de $\tan n\theta$ en fonction de $\tan \theta$	33

3.	Résolution d'équations algébriques dans \mathbb{C}	34
3.1	Équation du second degré dans \mathbb{C}	34
3.2	Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe	39
4.	Applications à la géométrie	41
2	Géométrie plane	47
1.	Définitions, Notations	47
2.	Modes de repérage d'un point	49
2.1	Coordonnées cartésiennes	49
2.2	Affixes	50
2.3	Coordonnées polaires	52
3.	Produit scalaire	54
3.1	Propriétés du produit scalaire	54
3.2	Projection sur une droite	57
4.	Déterminant et angles orientés	58
4.1	Orientations du plan	58
4.2	Angle orienté	59
4.3	Déterminant de deux vecteurs	60
4.4	Propriétés	61
4.5	Application à la résolution d'un système	63
4.6	Exemple d'utilisation des complexes	65
4.7	Angles de droites	67
5.	Repères cartésiens	67
5.1	Définition	67
5.2	Changement de repère	69
6.	Droites	69
6.1	Représentations analytiques	69
6.2	Orthogonalité	73
6.3	Médiatrice	75
6.4	Distance d'un point à une droite	75
7.	Cercles	77
7.1	Généralités	77
7.2	Droites et cercles	79
7.3	Intersection de cercles	80
7.4	Cercles et angles	82
7.5	Exemples de lignes de niveau	84
8.	Transformations remarquables du plan	87
8.1	Translations, homothéties	87
8.2	Rotations	89
8.3	Similitudes directes	90
8.4	Symétries	92
8.5	Inversions	93

3	Géométrie dans l'espace	105
1.	Définitions, Notations	105
2.	Modes de représentation d'un point	107
2.1	Coordonnées cartésiennes	107
2.2	Coordonnées cylindriques	108
2.3	Coordonnées sphériques	109
3.	Orthogonalité et produit vectoriel	109
3.1	Vecteurs orthogonaux à deux vecteurs non colinéaires	112
3.2	Propriétés du produit vectoriel	113
3.3	Bases orthonormées	115
3.4	Orientation	117
3.5	Interprétations géométriques du produit vectoriel	119
3.6	Produit mixte, déterminant	121
3.7	Coplanéarité	123
4.	Droites et plans	123
4.1	Représentations paramétriques	123
4.2	Équations cartésiennes	128
4.3	Intersection d'une droite et d'un plan	130
4.4	Projections orthogonales, distance à une droite ou à un plan	133
4.5	Perpendiculaire commune	136
4.6	Angles	137
5.	Sphères	137
5.1	Généralités	138
5.2	Plan et sphère	139
5.3	Droite et sphère	140
5.4	Intersection de sphères	145
4	Fonctions usuelles	145
1.	Fonctions logarithmes et exponentielles	146
1.1	Logarithme népérien	146
1.2	Exponentielle	147
1.3	Représentation graphique des fonctions logarithme népérien et exponentielle	148
1.4	Logarithmes et exponentielles de base quelconque	149
2.	Fonctions puissances	151
2.1	Définition	151
2.2	Fonctions racines	152
2.3	Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles	153
3.	Fonctions circulaires réciproques	154
3.1	Fonctions Arc sinus et Arc cosinus	154
3.2	Fonction Arc tangente	157
4.	Fonctions hyperboliques	160
4.1	Fonctions sinus et cosinus hyperboliques	160
4.2	Formules de base de la trigonométrie hyperbolique	161

.....	161
es	162
.....	165
.....	165
.....	166
.....	171
.....	171
nt à une équation différentielle .	172
.....	174
.....	174
.....	176
icients constants	186
.....	203
ans \mathbb{R}^2	203
.....	203
.....	204
.....	206
.....	206
.....	206
.....	207
ramétré	207
.....	209
.....	211
.....	211
mpote	212
.....	214
.....	214
étrée	216
.....	219
.....	219
.....	219
.....	219
olaire $r = \rho(\theta)$	220
.....	220
.....	221
nt du pôle	221
.....	222
.....	222
.....	223

7 Coniques

1. Ellipses, hyperboles, paraboles
 - 1.1 Définition monofocale
 - 1.2 Étude des paraboles .
 - 1.3 Étude des ellipses . . .
 - 1.4 Étude des hyperboles
 - 1.5 Équation polaire d'un
 - 1.6 Définition bifocale de
2. Définition analytique . . .
 - 2.1 Définition
 - 2.2 Réduction de l'équati
 - 2.3 Type d'une conique p
 - 2.4 Tangente à une coniq

II Analyse réelle et complexe

8 Le corps des nombres réels

1. Propriétés liées à la relation d'ordre
 - 1.1 Relation d'ordre . . .
 - 1.2 Corps totalement ord
 - 1.3 Valeur absolue . . .
2. Propriété de la borne supérieure
 - 2.1 Borne supérieure, bo
 - 2.2 Rationnels et irration
 - 2.3 Droite numérique ac
 - 2.4 Intervalles de \mathbb{R} . .
 - 2.5 Propriété d'Archimè
 - 2.6 Partie entière
 - 2.7 Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}
3. Fonctions réelles
 - 3.1 L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$
 - 3.2 Fonctions bornées . .
 - 3.3 Monotonie
 - 3.4 Parité, périodicité . .
 - 3.5 Fonction réciproque
 - 3.6 Fonctions lipschitzi

9 Suites réelles

1. Définitions
 - 1.1 Définitions liées à la
 - 1.2 Suites convergentes
 - 1.3 Propriétés des suite
 - 1.4 Suites tendant vers
 - 1.5 Caractère asymptot

7	Coniques	229
1.	Ellipses, hyperboles, paraboles	229
1.1	Définition monofocale	229
1.2	Étude des paraboles	230
1.3	Étude des ellipses	231
1.4	Étude des hyperboles	233
1.5	Équation polaire d'une conique de foyer O	235
1.6	Définition bifocale des ellipses et des hyperboles	237
2.	Définition analytique	238
2.1	Définition	238
2.2	Réduction de l'équation d'une conique	239
2.3	Type d'une conique propre	240
2.4	Tangente à une conique propre	242
II	Analyse réelle et complexe	249
8	Le corps des nombres réels	251
1.	Propriétés liées à la relation d'ordre	252
1.1	Relation d'ordre	252
1.2	Corps totalement ordonné	254
1.3	Valeur absolue	255
2.	Propriété de la borne supérieure	256
2.1	Borne supérieure, borne inférieure	256
2.2	Rationnels et irrationnels	258
2.3	Droite numérique achevée	259
2.4	Intervalles de \mathbb{R}	260
2.5	Propriété d'Archimède	261
2.6	Partie entière	262
2.7	Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}	263
3.	Fonctions réelles	264
3.1	L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$	264
3.2	Fonctions bornées	266
3.3	Monotonie	268
3.4	Parité, périodicité	270
3.5	Fonction réciproque	271
3.6	Fonctions lipschitziennes	272
9	Suites réelles	279
1.	Définitions	279
1.1	Définitions liées à la relation d'ordre	280
1.2	Suites convergentes	281
1.3	Propriétés des suites convergentes	284
1.4	Suites tendant vers l'infini	285
1.5	Caractère asymptotique de la notion de limite	286

286
287
288
288
289
290
292
293
293
294
295
périeure 295
296
298
s 299

307
307
307
309
309
312
315
315
317
320
r limite 320
321
323
325
325
326
326
326
328
329
329
331

337
337
337
338
339

- 2. Les théorèmes fondamentaux
 - 2.1 Théorème des valeurs intermédiaires
 - 2.2 Réciproque d'une fonction continue
 - 2.3 Image continue d'un segment
- 3. Continuité uniforme
 - 3.1 Définition, exemples
 - 3.2 Théorème de Heine

12 Dérivation

- 1. Définitions
 - 1.1 Dérivée en un point
 - 1.2 Dérivées à droite et à gauche
 - 1.3 Caractère local de la dérivabilité
 - 1.4 Dérivabilité et continuité
 - 1.5 Fonction dérivée
 - 1.6 Interprétations des dérivées
- 2. Opérations sur les fonctions dérivées
 - 2.1 L'ensemble $\mathcal{D}(f)$
 - 2.2 Inverse et quotient
 - 2.3 Composée et fonction réciproque
- 3. Théorème de Rolle – Théorème de Weierstrass
 - 3.1 Extremum d'une fonction dérivée
 - 3.2 Théorème de Rolle
 - 3.3 Égalité des accroissements finis
- 4. Applications
 - 4.1 Variations d'une fonction
 - 4.2 Inégalité des accroissements finis
 - 4.3 Étude d'une suite récurrente
 - 4.4 Condition suffisante de dérivabilité
- 5. Dérivées successives
 - 5.1 Dérivée seconde
 - 5.2 Dérivée d'ordre n
- 6. Fonctions de classe \mathcal{C}^n
 - 6.1 Définitions, exemples
 - 6.2 Ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n
 - 6.3 Composée, inverse, et fonction réciproque

13 Fonctions convexes

- 1. Généralités
 - 1.1 Définitions
 - 1.2 Inégalité de convexité
 - 1.3 Caractérisation géométrique
 - 1.4 Caractérisation en terme de dérivée
- 2. Convexité et dérivabilité
 - 2.1 Caractérisation des fonctions convexes
 - 2.2 Position par rapport à la tangente

14	Intégration	411
1.	Intégrale des fonctions en escalier	412
1.1	Subdivision d'un segment	412
1.2	Fonctions en escalier	413
1.3	Intégrale d'une fonction en escalier	414
1.4	Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier	415
2.	Fonctions continues par morceaux	417
2.1	Définition, exemples	417
2.2	Approximation des fonctions continues par morceaux	419
2.3	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	420
2.4	Valeur moyenne	422
3.	Propriétés de l'intégrale	423
3.1	Linéarité, relation de Chasles	423
3.2	Inégalités	425
3.3	Cas des fonctions continues	428
3.4	Invariance par translation	430
4.	Sommes de Riemann	431
5.	Fonctions continues par morceaux sur un intervalle	436
15	Intégration et dérivation	443
1.	Primitives et intégrale d'une fonction continue	443
1.1	Définitions	443
1.2	Théorème fondamental	444
2.	Méthodes de calcul de primitives	448
2.1	Intégration par parties	448
2.2	Changement de variable	450
3.	Formules de Taylor	454
3.1	Formule de Taylor avec reste intégral	454
3.2	Inégalité de Taylor–Lagrange	456
3.3	Formule de Taylor–Young	457
16	Étude locale : relations de comparaison	465
1.	Fonctions dominées, fonctions négligeables	466
1.1	Définitions, exemples	466
1.2	Propriétés	467
2.	Fonctions équivalentes	469
2.1	Définitions	469
2.2	Résultats fondamentaux	471
2.3	Obtention d'équivalents	472
2.4	Opérations sur les fonctions équivalentes	473
2.5	Les équivalents et l'addition	476
2.6	Équivalents classiques en 0	478
3.	Comparaison des suites	479
3.1	Définitions, caractérisations	479

3.2	Résultats fondamentaux	480
3.3	Utilisation des résultats correspondants sur les fonctions	480
3.4	Opérations sur les suites équivalentes	481
17	Étude locale : développements limités	487
1.	Définitions, exemples	487
1.1	Développement limité au voisinage de 0	487
1.2	Développements limités en 0 des fonctions élémentaires	491
1.3	Développement limité en x_0	492
1.4	Développement limité à droite et à gauche	494
1.5	Développement limité au voisinage de l'infini	496
1.6	Dérivabilité et développement limité	497
2.	Opérations sur les développements limités	499
2.1	Somme et produit de développements limités	499
2.2	Quotient de développements limités	502
2.3	Composition de développements limités	506
2.4	Intégration des développements limités	507
3.	Applications	511
3.1	Recherche d'équivalents	511
3.2	Étude de tangentes	513
3.3	Recherche d'asymptotes	517
18	Suites et fonctions complexes	527
1.	Généralités	527
1.1	L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$	527
1.2	Fonctions bornées	528
2.	Suites complexes	529
2.1	Suites convergentes	529
2.2	Suites extraites	531
3.	Propriétés des suites convergentes	532
3.1	Ensemble des suites convergentes	532
3.2	Inverse et quotient de suites	532
4.	Limites, continuité en un point	533
4.1	Définitions	533
4.2	Propriétés des limites	534
4.3	Opérations sur les limites	535
5.	Continuité sur un intervalle	536
5.1	Définition	536
5.2	Opérations sur les fonctions continues	537
6.	Dérivation	538
6.1	Dérivée en un point	538
6.2	Opérations sur les fonctions dérivables	539
6.3	Fonctions dérivables sur un intervalle	540
6.4	Dérivées successives	542

6.5	Fonctions de classe C^n	543
7.	Intégration	544
7.1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	544
7.2	Propriétés de l'intégrale	545
7.3	Primitives	546
7.4	Théorème du relèvement	548
8.	Accroissements finis, formules de Taylor	549
8.1	Inégalité des accroissements finis	549
8.2	Formules de Taylor	550
8.3	Développements limités	551
19	Calculs d'intégrales	555
1.	Calcul de primitives	555
1.1	Primitives d'une fraction rationnelle	555
1.2	Primitives des polynômes-exponentielles	559
1.3	Primitives des fonctions usuelles	561
2.	Méthodes de calcul approché d'intégrales	561
2.1	Méthode des rectangles	563
2.2	Méthode des rectangles médians	564
2.3	Méthode des trapèzes	567
2.4	Méthode de Simpson	569
20	Propriétés métriques des courbes paramétrées	577
1.	Modes de définition d'une courbe plane	577
1.1	Représentation cartésienne	577
1.2	Représentation paramétrique	578
1.3	Représentation polaire	578
1.4	Paramétrage admissible	579
2.	Longueur d'un arc paramétré	580
2.1	Définitions	580
2.2	Calcul	582
3.	Abscisse curviligne sur un arc orienté	583
3.1	Arc paramétré orienté	583
3.2	Abscisse curviligne	584
3.3	Paramétrage par l'abscisse curviligne	587
4.	Courbure d'un arc orienté régulier	588
4.1	Courbure, rayon de courbure	588
4.2	Formules de Frénet	589
4.3	Interprétation cinématique	590
4.4	Calculs pratiques	591

21 Fonctions de deux variables	601
1. Préliminaires	601
1.1 Parties ouvertes	601
1.2 Applications partielles associées à une fonction de deux variables	604
2. Continuité	605
2.1 Limite et continuité d'une fonction de deux variables	605
2.2 Propriétés	607
2.3 L'espace vectoriel $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$	608
2.4 Espace vectoriel $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^2)$	611
2.5 Composées de fonctions continues	612
3. Dérivées d'ordre 1 d'une fonction de deux variables	614
3.1 Dérivées partielles	614
3.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1	616
3.3 Dérivée d'une fonction composée	621
3.4 Gradient	622
3.5 Dérivées partielles d'une fonction composée	624
3.6 Coordonnées polaires	625
3.7 Extremum d'une fonction de deux variables	627
4. Dérivées d'ordre supérieur	630
4.1 Dérivées partielles secondes	630
4.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles	633
4.3 Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$	636
22 Intégrales multiples	643
1. Intégrale double sur un rectangle	643
1.1 Intégrale d'une fonction en escalier	643
1.2 Intégrale d'une fonction continue	645
1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue	646
1.4 Calcul de l'intégrale double d'une fonction continue	647
2. Intégrale double d'une fonction sur une partie bornée de \mathbb{R}^2	648
2.1 Fonction intégrable sur une partie bornée de \mathbb{R}^2	648
2.2 Calcul d'une intégrale double	650
3. Changement de variables	652
3.1 Changement de variables affine	652
3.2 Changement de variables en coordonnées polaires	655
4. Intégrales triples	658
4.1 Intégrale triple sur un pavé	658
4.2 Intégrale triple d'une fonction sur une partie bornée de \mathbb{R}^3	658
4.3 Changement de variables	659

23	Calculs de champs de vecteurs	667
1.	Gradient, divergence, rotationnel	667
1.1	Différentielle, matrice jacobienne	667
1.2	Gradient	668
1.3	Divergence	669
1.4	Laplacien	670
1.5	Rotationnel	671
1.6	Potentiel scalaire	671
2.	Intégrale curviligne	673
2.1	Circulation d'un champ de vecteurs	673
2.2	Formule de Green–Riemann	675
III	Algèbre et géométrie	679
24	Arithmétique dans \mathbb{Z}	681
1.1	Diviseurs, multiples	681
1.2	Division euclidienne sur \mathbb{Z}	682
1.1	Définition, règles de calcul	756
1.2	Représentant irréductible d'une fraction rationnelle	757
1.3	Degré d'une fraction rationnelle	75
1.4	Racines, pôles	75
1.5	Composition	76
2.	Décomposition en éléments simples	76
2.1	Partie entière	76
2.2	Partie polaire	76
2.3	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$	76
2.4	Méthodes pratiques	76
27	Algèbre linéaire et géométrie affine élémentaires	77
1.	Espaces vectoriels	77
1.1	Définition, propriétés, exemples	77
1.2	Combinaisons linéaires	77
1.3	Produit d'espaces vectoriels	78
1.4	Sous-espaces vectoriels	78
2.	Sous-espace vectoriel engendré par une partie	78
2.1	Définition	78

3.2	Identification entre polynôme et fonction polynomiale	722
3.3	Racines multiples	723
3.4	Polynômes scindés, fonctions symétriques élémentaires	726
4.	Dérivation des polynômes	729
4.1	Polynôme dérivé	729
4.2	Dérivées successives, formule de Taylor	731
4.3	Caractérisation de l'ordre d'une racine	732
5.	Étude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	733
5.1	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$	733
5.2	Conjugaison	734
5.3	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$	735
6.	Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM)	736
6.1	Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide	736
6.2	Plus petit commun multiple	738
6.3	Polynômes premiers entre eux	739
6.4	Propriétés du PGCD et du PPCM	740
6.5	Théorème de Gauss	741
7.	Polynômes irréductibles	743
7.1	Définition	743
7.2	Propriétés	744
7.3	Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles	745
26	Fractions rationnelles	755
1.	Corps des fractions rationnelles	755
1.1	Définition, règles de calcul	755
1.2	Représentant irréductible d'une fraction rationnelle	756
1.3	Degré d'une fraction rationnelle	757
1.4	Racines, pôles	759
1.5	Composition	760
2.	Décomposition en éléments simples	761
2.1	Partie entière	761
2.2	Partie polaire	762
2.3	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$	766
2.4	Méthodes pratiques	769
27	Algèbre linéaire et géométrie affine élémentaires	777
1.	Espaces vectoriels	777
1.1	Définition, propriétés, exemples	777
1.2	Combinaisons linéaires	779
1.3	Produit d'espaces vectoriels	780
1.4	Sous-espaces vectoriels	781
2.	Sous-espace vectoriel engendré par une partie	782
2.1	Définition	782

2.2	Cas d'une partie finie	784
3.	Sous-espaces affines	785
3.1	Translations	785
3.2	Sous-espaces affines	786
3.3	Parallélisme	788
3.4	Intersection de sous-espaces affines	789
3.5	Barycentres	790
4.	Applications linéaires	795
4.1	Définition, caractérisation	795
4.2	Noyau, image d'une application linéaire	797
4.3	Structures de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$	798
4.4	Applications affines	801
4.5	Applications bilinéaires	808
5.	Équations linéaires	809
5.1	Définition, exemples	809
5.2	Structure de l'ensemble des solutions	810
28	Sous-espaces supplémentaires et bases d'un espace vectoriel	815
1.	Sous-espaces vectoriels supplémentaires	815
1.1	Somme de sous-espaces vectoriels	815
1.2	Sous-espaces vectoriels supplémentaires	816
1.3	Intersection de sous-espaces affines	818
1.4	Projections, symétries, affinités	819
2.	Familles libres, familles génératrices, bases	825
2.1	Familles génératrices	825
2.2	Familles libres	827
2.3	Bases	830
2.4	Bases et applications linéaires	831
3.	Repères cartésiens	834
3.1	Définitions	834
3.2	Règles de calcul	834
29	Espaces vectoriels de dimension finie	841
1.	Dimension d'un espace vectoriel	841
1.1	Existence d'une base	841
1.2	Dimension	842
1.3	Théorème de la base incomplète	845
1.4	Un exemple : les suites récurrentes d'ordre 2	846
1.5	Dimension des sous-espaces vectoriels	847
2.	Relations entre les dimensions	849
2.1	Dimension et isomorphisme	849
2.2	Dimension d'un produit de sous-espaces vectoriels	850
2.3	Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels	851

3.	Rang	853
3.1	Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire	853
3.2	Théorème du rang	854
3.3	Caractérisation des isomorphismes	855
3.4	Hyperplans et formes linéaires	857
30	Matrices	867
1.	Introduction	867
1.1	Définitions	867
1.2	Matrice d'une application linéaire	869
1.3	Matrice de changement de bases	872
1.4	Matrice d'une famille finie de vecteurs	875
2.	Opérations sur les matrices	876
2.1	Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	876
2.2	Produit de matrices	879
2.3	Anneau des matrices carrées d'ordre n	884
2.4	Exemple : une construction de \mathbb{C}	890
3.	Rang des matrices	891
3.1	Matrices d'une application linéaire dans des bases différentes	891
3.2	Rang d'une matrice	892
31	Systèmes linéaires	901
1.	Opérations élémentaires sur les rangées d'une matrice	901
1.1	Généralités	901
1.2	Traduction en terme de produit matriciel	902
1.3	Application au calcul du rang	903
1.4	Méthode du pivot de Gauss	905
2.	Systèmes linéaires	907
2.1	Définitions	907
2.2	Structure affine de l'ensemble des solutions	908
2.3	Interprétations d'un système linéaire	908
3.	Systèmes de Cramer	910
3.1	Définition	910
3.2	Résolution d'un système de Cramer par la méthode du pivot de Gauss	911
32	Déterminants	917
1.	Groupe symétrique	917
1.1	Définition	917
1.2	Signature	919
1.3	Groupe alterné	921
2.	Applications p -linéaires	922
2.1	Définition	922
2.2	Expression d'une application p -linéaire en dimension finie	923

2.3	Applications p -linéaires alternées	925
2.4	Expression d'une application n -linéaire alternée en dimension n	927
3.	Déterminants	928
3.1	Formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n	928
3.2	Diverses notions de déterminants	931
3.3	Propriétés des déterminants	935
4.	Applications	939
4.1	Opérations sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant	939
4.2	Développement d'un déterminant suivant une rangée	940
4.3	Comatrice	945
4.4	Formules de Cramer	947
33	Espaces euclidiens	955
1.	Définitions	955
1.1	Formes bilinéaires symétriques	955
1.2	Produit scalaire	956
1.3	Norme euclidienne	957
1.4	Espaces vectoriels euclidiens	960
1.5	Identités de polarisation	960
2.	Bases orthonormées	962
2.1	Familles orthonormées	962
2.2	Bases et repères orthonormés	965
2.3	Procédé d'orthonormalisation de Schmidt	967
3.	Sous-espaces orthogonaux	969
3.1	Définitions	969
3.2	Supplémentaire orthogonal	969
3.3	Équations d'un hyperplan	970
4.	Projections orthogonales	972
4.1	Projections vectorielles	972
4.2	Projections affines	974
4.3	Distance à un sous-espace	974
5.	Orientation	976
5.1	Définition	976
5.2	Bases orthonormées directes	977
34	Isométries du plan et de l'espace	981
1.	Isométries, matrices orthogonales	981
1.1	Automorphismes orthogonaux	981
1.2	Isométries affines	984
1.3	Matrices orthogonales	986
1.4	Groupe orthogonal	988
1.5	Rotations, déplacements	989
2.	Réflexions	990
2.1	Symétries orthogonales	990

2.2	Propriétés des réflexions	992
2.3	Composées de réflexions	993
3.	Automorphismes orthogonaux du plan	995
3.1	Matrices orthogonales	995
3.2	Rotations vectorielles, angles	996
3.3	Réflexions vectorielles	998
4.	Isométries du plan affine	1000
4.1	Étude des déplacements du plan	1000
4.2	Composées de réflexions	1001
4.3	Similitudes du plan	1002
5.	Automorphismes orthogonaux de l'espace	1003
5.1	Orientation d'un plan	1003
5.2	Décomposition en produit de réflexions	1004
5.3	Rotations vectorielles	1005
6.	Isométries affines de l'espace	1007
6.1	Rotations affines	1007
6.2	Vissages	1009
6.3	Composées de réflexions	1012

Notions de base

1017

35 Ensembles, applications, relations

1019

1.	Assertions	1020
1.1	Assertions	1020
1.2	Connecteurs	1020
1.3	Méthodes de démonstration	1022
2.	Ensembles, prédicats	1023
2.1	Généralités	1023
2.2	Prédicats	1023
2.3	Quantificateurs	1024
2.4	Négation de quantificateurs	1025
2.5	Sous-ensembles définis par un prédicat	1026
2.6	Opérations sur les parties	1026
2.7	Couples, produit cartésien	1027
3.	Applications	1028
3.1	Définitions	1028
3.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	1031
3.3	Composition d'applications	1032
3.4	Application réciproque	1033
3.5	Images directes, images réciproques	1036
3.6	Familles	1039
4.	Relations d'ordre	1040
4.1	Relations binaires	1040
4.2	Ensembles ordonnés	1041
4.3	Propriétés	1042

36 Entiers naturels, ensembles finis, dénombrement	1045
1. <i>Principe de récurrence</i>	<i>1045</i>
1.1 L'ensemble \mathbb{N}	1045
1.2 Raisonnement par récurrence	1046
1.3 Suites définies par récurrence	1049
2. Ensembles finis	1049
2.1 Définitions	1049
2.2 Propriétés des cardinaux	1051
3. Dénombrement	1059
3.1 Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini	1059
3.2 Nombre de parties à p éléments	1061
37 Structures algébriques usuelles	1065
1. Lois de composition interne	1065
1.1 Généralités	1065
1.2 Itérés d'un élément	1069
1.3 Produit de n éléments	1069
1.4 Notation additive	1070
1.5 Construction de lois	1071
1.6 Morphismes	1073
2. Groupes	1074
2.1 Définitions, exemples	1074
2.2 Sous-groupes	1075
2.3 Morphismes de groupes	1076
2.4 Noyau, image	1077
3. Anneaux	1079
3.1 Définitions	1079
3.2 Règles de calcul	1080
3.3 Anneaux intègres	1083
3.4 Sous-anneaux	1084
3.5 Morphismes d'anneaux	1084
3.6 Éléments inversibles, unités	1085
4. Corps	1086
4.1 Définitions	1086
4.2 Corps des fractions	1088
5. Espaces vectoriels	1088
Solutions des exercices	1089
Index	1405

J'INTÈGRE
Série E. Ramis

J'intègre

sous la direction de
Claude Deschamps • André Warusfel

2^e édition

MATHÉMATIQUES

TOUT-EN-UN • 1^{re} année

Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage couvre, en un seul volume, la totalité du nouveau programme de mathématiques de 1^{re} année des filières MPSI et PCSI.

Conçu spécialement pour tous ceux qui souhaitent avoir une vision globale du cours dans le strict respect du programme, l'ouvrage se compose de 37 chapitres s'articulant autour de trois grands thèmes :

- Analyse réelle et complexe
- Algèbre et géométrie
- Analyse et géométrie

Chaque chapitre est suivi de nombreux exercices d'entraînement et de synthèse, dont toutes les solutions sont données en fin de volume. Conformément à l'esprit du nouveau programme, les premiers chapitres de l'ouvrage regroupent les notions étudiées en début d'année. Définitions et notions de base sont proposées en fin d'ouvrage.

Le cours, rédigé par François Moulin et Jean François Ruaud, se veut clair et concis. Les exercices, quant à eux, ont été conçus par Anne Miquel et Jean-Claude Sifre de manière que tout étudiant puisse les aborder sereinement et y trouver une source d'apprentissage adaptée à son niveau.

Par ses qualités scientifiques et pédagogiques, ce livre s'avère le digne successeur de la célèbre série dirigée par Edmond Ramis.

CLAUDE DESCHAMPS
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, est professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycée Louis-le-Grand.

ANDRÉ WARUSFEL
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycée Louis-le-Grand et Inspecteur Général de mathématiques.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE



9 782100 505784

ISBN 2 10 050578 5

www.dunod.com


DUNOD