

SCIENCES SUP

*Exercices et problèmes corrigés*

**CAPES • Agrégation • Licence 3<sup>e</sup> année/Master**

# **PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES**

**320 énoncés  
avec solutions détaillées**

*Jean Delcourt*

DUNOD

M574



# PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

320 énoncés avec solutions détaillées

CAPES • Agrégation • Licence 3<sup>e</sup> année/Master

⑤

30475

**Jean Delcourt**

Professeur agrégé à l'université de Cergy-Pontoise

DUNOD

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b>	VII
<b>PARTIE 1. GÉOMÉTRIE</b>	1
<b>CHAPITRE 1 • DROITES</b>	3
Énoncés	4
1.1 Définitions	4
1.2 Méthodes de base	4
1.3 Familles de droites dans le plan	6
1.4 Droites et distances	6
Solutions	7
<b>CHAPITRE 2 • LA RÈGLE ET LE COMPAS</b>	15
Énoncés	15
2.1 Constructions élémentaires	15
2.2 Nombres constructibles	15
2.3 Intermède : construction des moyennes de deux nombres	16
2.4 Polygones constructibles	16
Solutions	17
<b>CHAPITRE 3 • LE TRIANGLE</b>	25
Énoncés	25
3.1 Droites remarquables	26
3.2 Activités sur les triangles	27
Solutions	28
<b>CHAPITRE 4 • <math>\pi</math></b>	39
Énoncés	39
4.1 Suites de Schwab	39
4.2 Méthode des isopérimètres	40
4.3 Somme de deux carrés	41
4.4 Aire et volume dans la sphère	42
4.5 Wirtinger et l'isopérimètre	42
Solutions	43
<b>CHAPITRE 5 • AIRES ET VOLUMES</b>	53
Énoncés	53
5.1 Formule de Pick	53
5.2 Formule de Héron	54
5.3 Aires et volumes : avec coordonnées	55
5.4 Deux généralisations : Brahmagupta et Piero della Francesca	55
Solutions	56

CHAPITRE 6 • LIGNES DE NIVEAU	65
Énoncés	65
6.1 Les cercles d'Appolonius	65
6.2 Produit des distances et lemniscate	66
6.3 Lignes de niveau et gradient	66
Solutions	67
CHAPITRE 7 • CERCLES	73
Énoncés	73
7.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle	73
7.2 L'inversion	74
7.3 Faisceaux de cercles	75
Solutions	76
CHAPITRE 8 • RAPPORT ET BIRAPPORT	87
Énoncés	87
8.1 Rapport	87
8.2 Birapport	88
8.3 Homographies	89
Solutions	90
CHAPITRE 9 • QUATERNIONS	99
Énoncés	99
9.1 Quaternions algébriques	99
9.2 Quaternions géométriques	101
Solutions	102
CHAPITRE 10 • INÉGALITÉ TRIANGULAIRE	109
Énoncés	109
10.1 Géométrie classique	109
10.2 Inégalité triangulaire et norme	110
Solutions	111
CHAPITRE 11 • COURBES	119
Énoncés	119
11.1 Généralités	119
11.2 Rectification, courbure	120
11.3 Courbes et équations différentielles	121
11.4 Courbes telles que...	122
11.5 Courbes et transformation	123
Solutions	123
CHAPITRE 12 • CONIQUES	137
Énoncés	137
12.1 Réductions d'équations	137
12.2 Coniques géométriques : les paraboles	138
12.3 Coniques géométriques : les ellipses et les hyperboles	139
Solutions	141

CHAPITRE 13 • PAVAGES	159
Énoncés	159
13.1 Étude théorique	159
13.2 Étude pratique	161
Solutions	161
CHAPITRE 14 • SECTIONS	167
Énoncés	167
14.1 Projections : tétraèdres, cubes	167
14.2 Les coniques dans l'espace	168
Solutions	169
CHAPITRE 15 • LA SPHÈRE	175
Énoncés	175
15.1 Petits et grands cercles	175
15.2 Triangles sphériques	176
15.3 Trigonométrie sphérique	176
Solutions	177
<b>PARTIE 2. ALGÈBRE, ARITHMÉTIQUE...</b>	<b>183</b>
CHAPITRE 16 • RÉCURRENCE	185
Énoncés	185
16.1 Première Partie : le principe de récurrence	185
16.2 Ensembles bien ordonnés	187
Solutions	188
CHAPITRE 17 • RÉCURRENCE ALGÈBRIQUE	195
Énoncés	195
17.1 Récurrence linéaire	195
17.2 Récurrences homographiques	197
Solutions	197
CHAPITRE 18 • QUELQUES DÉNOMBREMENTS	205
Énoncés	205
18.1 Dénombrements en géométrie	205
18.2 Dénombrements et triangle de Pascal	205
18.3 D'autres choses	206
18.4 Séries et dénombrements	207
Solutions	207

CHAPITRE 19 • NUMÉRATION	215
Énoncés	215
19.1 Écriture en base $b$	215
19.2 Ensemble des décimaux	216
19.3 Développement décimal d'un réel positif	216
19.4 Développement décimal d'un rationnel positif	216
19.5 Divisibilité	217
Solutions	217
CHAPITRE 20 • EUCLIDE, FRACTIONS CONTINUES	225
Énoncés	225
20.1 L'algorithme	225
20.2 Avec des matrices	226
20.3 À l'envers	226
Solutions	227
CHAPITRE 21 • RACINES DE L'UNITÉ	233
Énoncés	233
21.1 Une formule d'inversion	233
21.2 Racines $n$ -ièmes de l'unité	234
21.3 Polygones réguliers	234
Solutions	235
CHAPITRE 22 • POLYNÔMES DU SECOND ET TROISIÈME DEGRÉ	241
Énoncés	241
22.1 Second degré d'abord	241
22.2 Troisième degré début	242
22.3 Troisième degré : la résolution	242
Solutions	243
CHAPITRE 23 • BERNOULLI, EULER ET MAC LAURIN	247
Énoncés	247
23.1 Polynômes de Bernoulli	247
23.2 La formule d'Euler-Mac Laurin	248
Solutions	251
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	259
<b>INDEX</b>	260



Jean Delcourt

# PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

## 320 énoncés avec solutions détaillées

Cet ouvrage est un recueil d'exercices et de problèmes de mathématiques, corrigés de façon très détaillée et regroupés en 23 thèmes de géométrie (les aires, le birapport...), d'algèbre (les quaternions, l'algorithme d'Euclide...) et d'analyse (l'approximation). Son approche est transversale : les idées, les figures, les calculs... en amènent d'autres, chaque thème est décliné en utilisant autant d'outils que possible.

Destiné plus particulièrement aux candidats au CAPES de mathématiques, il vise à les entraîner à préparer l'écrit de ce concours en les amenant à utiliser pleinement leurs connaissances. Cet ouvrage sera aussi fort utile aux étudiants en 2<sup>e</sup> cycle/Master et aux candidats à l'Agrégation qui doivent apprendre à maîtriser les techniques de résolution de problèmes.

JEAN DELCOURT  
est professeur agrégé  
à l'université  
de Cergy-Pontoise.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



9 782100 483860

