

SCIENCES SUP

*Cours et exercices avec solutions*

**Licence 3<sup>e</sup> année**

# ALGÈBRE

## 3<sup>e</sup> ANNÉE

2<sup>e</sup> édition

*Lionel Schwartz*

DUNOD

M571

29855

# ALGÈBRE

## 3<sup>e</sup> ANNÉE



### Cours et exercices avec solutions

**Lionel Schwartz**

Professeur à l'université de Paris-Nord  
(Paris 13 – Villetanneuse)

Préfacé par

**Michel Zisman**

Professeur émérite de l'université Paris 7 - Denis Diderot

2<sup>e</sup> édition

DUNOD

# Table des matières

## Chapitre 0.

### Rappels

|   |   |
|---|---|
| 1. Rappel de théorie des ensembles  | 1 |
| 2. Rappels sur l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et son corps des fractions $\mathbb{Q}$ | 2 |
| 3. Topologie de $\mathbb{R}^n$  | 4 |
| 4. Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$  | 4 |
| 5. Espaces vectoriels et algèbre linéaire   | 5 |
| 6. Matrices, déterminants, systèmes linéaires   | 8 |

## Chapitre 1.

### Groupes. Groupes quotients Groupes abéliens de type fini

|  |    |
|--|----|
| 1. Groupes, générateurs, groupes monogènes   | 12 |
| 2. Relations d'équivalence dans un groupe, groupes quotients                                       | 22 |
| 3. Décomposition primaire des groupes abéliens finis   | 33 |
| 4. Structure des groupes abéliens de type fini, définitions, énoncés, structure des groupes libres | 36 |
| 5. Structure des groupes abéliens de type fini de torsion  | 41 |
| Exercices  | 44 |

## Chapitre 2.

### Actions de groupes Groupes symétriques

|   |    |
|---|----|
| 1. Actions de groupes, exemples                                   | 51 |
| 2. Orbites, ensembles transitifs, décomposition en orbites        | 56 |
| 3. Théorèmes de Sylow   | 61 |
| 4. Groupes symétriques, classes de conjugaison                    | 64 |
| 5. Groupes symétriques, générateurs, simplicité du groupe alterné | 72 |
| Exercices   | 77 |

## Chapitre 3.

### Anneaux, idéaux, polynômes et séries formelles

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 1. Anneaux, idéaux, anneaux quotients | 85  |
| 2. Anneaux principaux                 | 96  |
| 3. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  | 103 |
| 4. Cryptographie à clé révélée        | 105 |

|  |     |
|--|-----|
| 5. Anneaux de polynômes et de séries formelles                 | 110 |
| 6. Polynômes en plusieurs indéterminées, polynômes symétriques | 116 |
| 7. Anneaux factoriels et applications                          | 122 |
| 8. Zéros des polynômes   | 127 |
| 9. Compléments sur les séries formelles                        | 133 |
| Exercices  | 135 |

## **Chapitre 4. Extensions des corps. Applications**

|   |     |
|---|-----|
| 1. Définitions, caractéristique d'un corps, applications                  | 150 |
| 2. Éléments algébriques dans un corps et extensions algébriques des corps | 153 |
| 3. Corps de rupture d'un polynôme   | 158 |
| 4. Corps algébriquement clos, clôture algébrique                          | 160 |
| 5. Structure et classification des corps finis                            | 162 |
| 6. Applications arithmétiques   | 167 |
| 7. Racines de l'unité, polynômes cyclotomiques                            | 169 |
| 8. Théorème de Wedderburn   | 172 |
| 9. L'algorithme de Berlekamp  | 174 |
| 10. Les codes correcteurs d'erreurs                                       | 178 |
| Exercices   | 191 |

## **Chapitre 5. Réductions des endomorphismes Structure du groupe linéaire**

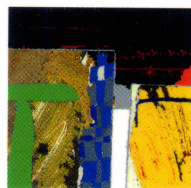
|   |     |
|---|-----|
| 1. Polynôme minimal d'un endomorphisme  | 204 |
| 2. Théorème de Cayley-Hamilton  | 210 |
| 3. Triangularisation des matrices et réduction de Jordan                      | 214 |
| 4. Applications topologiques de la diagonalisation et de la triangularisation | 220 |
| 5. Générateurs du groupe linéaire   | 225 |
| Exercices   | 234 |

## **Chapitre 6. Formes bilinéaires et sesquilineaires Groupes orthogonaux et unitaires**

|  |     |
|--|-----|
| 1. Formes bilinéaires et sesquilineaires           | 245 |
| 2. Structure du groupe orthogonal euclidien        | 255 |
| 3. Les quaternions, les groupes $SO(3)$ et $SO(4)$ | 264 |
| 4. Structure du groupe unitaire                    | 273 |
| Exercices  | 276 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| <b>Bibliographie</b> | 283 |
|----------------------|-----|

|              |     |
|--------------|-----|
| <b>Index</b> | 285 |
|--------------|-----|



2<sup>e</sup> édition

Lionel Schwartz

## ALGÈBRE 3<sup>e</sup> ANNÉE

Prolongement du cours de 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> année de François Liret et Dominique Martinais, ce cours de mathématiques traite en quatre volumes le programme de la troisième année de Licence.

Trois notions centrales sont abordées dans ce volume d'algèbre :

- la structure des groupes et les actions de groupes, avec une insistance particulière sur les groupes symétriques ;
- les anneaux, avec la question de la divisibilité sous ses divers aspects ;
- les extensions de corps enfin, et notamment ce qui concerne les corps finis.

L'auteur revient également sur la réduction des endomorphismes, les formes quadratiques, et sur les propriétés topologiques des groupes classiques.

À un niveau plus avancé, une introduction à deux applications de ces mathématiques est proposée : la cryptographie et les codes correcteurs d'erreurs, prolongements naturels de ce cours.

Enfin, des exercices viennent compléter chaque chapitre, et permettent d'approfondir certains points essentiels ou d'aborder des résultats plus spécifiques.

Dans cette seconde édition, des compléments en géométrie, codes correcteurs d'erreurs, cryptographie sont apportés. Quelques aspects complexes du cours ont été précisés et les exercices ont été renouvelés.

### COURS DE MATHÉMATIQUES

Ce cours de mathématiques traite en quatre volumes le programme de la troisième année de Licence.

- Algèbre
- Topologie et Analyse
- Fonctions analytiques
- Calcul différentiel et Calcul intégral



ISBN 2 10 007057 6

www.dunod.com

LIONEL SCHWARTZ  
est professeur à  
l'université Paris-Nord  
(Paris 13-Villetaneuse).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



DUNOD